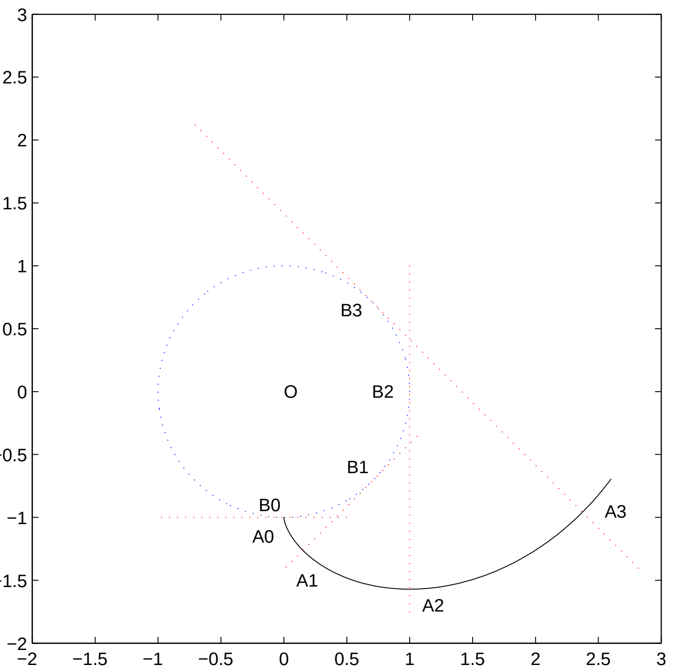
PROBLEMA 117. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol 11, 2008, p. 694. *Propuesto por Javier del Rey Pantín, I. E. S. Doña Jimena, Gijón.*

¿Cómo debe ser el perfil de una palanca para que la fuerza que transmite al peso que se desea elevar tenga en todo momento la dirección de la vertical? O bien, más concretamente: supongamos que una palanca rígida tiene su punto de apoyo en el origen de coordenadas, que la dirección de la vertical es la de OY, y que sobre el perfil de la palanca puede rodar sin rozamiento un objeto puntual pesado. Encontrar la ecuación para dicho perfil de modo que, al mover la palanca, el objeto pesado situado inicialmente en un punto de coordenadas $(a, -h)$ (donde $a > 0$ y $a \leq h < \infty$), pueda ser elevado hasta el punto $(a, 0)$ manteniéndose siempre en la recta vertical $x = a$.

SOLUCIÓN (J M Sanz-Serna): Gaceta de la la Real Sociedad Matemática Española, Vol 12, 2009, p. 701–702.



Sean $A0$, $A1$, ... puntos de la palanca $\mathcal{P}$. La tangente a $\mathcal{P}$ en el punto, digamos $A2$, en que ahora se halla el objeto debe encontrarse en posición horizontal y por tanto la correspondiente normal ha de ser la vertical a distancia a del fulcro O. Más tarde la palanca habrá girado contra las agujas, el objeto se hallará en $A1$ y entonces la normal en $A1$ estará vertical y a distancia a de O. Por tanto la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y radio a es la *envolvente* de la familia de normales a la palanca en los puntos que van siendo ocupados por el objeto. En lenguaje clásico, $\mathcal{C}$ es la curva *evoluta* de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ la *evolvente* de $\mathcal{C}$. Esto resuelve el problema.

Cuatro notas:

(1) Ecuación de la palanca: basta observar que los puntos de tangencia $B1$, $B2, \ldots$ son los centros de curvatura de $\mathcal{P}$ en $A1$, $A2, \ldots$, (el centro de curvatura es la posición lìmite del punto de intersección de normales próximas). Por tanto, la evolvente puede describirse como el lugar geométrico de los puntos $A0$, $A1$, $\ldots$ que sucesivamente ocupa el extremo libre de un hilo, inicialmente arrollado a $\mathcal{C}$, al irse desenrollando. Así en la figura las longitudes de los segmentos $A1B1$, $A2B2$,... coinciden con las de los arcos $B0B1$, $B0B2$, etc. y en definitiva

$$x = a\sin t - at\cos t, \qquad y = -a\cos t - at\sin t,$$

donde el parámtetro t es el ángulo entre la vertical descendente y OB.

(2) El razonamiento anterior no determina la forma de la palanca entre O y $A0$, forma que evidentemente puede ser arbitraria.

(3) La evolvente es ilimitada (t puede ser arbitrariamente grande) y por ello pueden construirse palancas espirales para que el objeto suba desniveles h tan grandes como se desee (la condición $a \leq h$ es innecesaria).

(4) Alternativamente, la ecuación de $\mathcal{P}$ puede determinarse planteando la ecuación diferencial que expresa que las normales a una curva distan a del origen. Como esta condición es invariante por rotación, conviene escribir la ecuación en coordenadas polares para que resulte autónoma. Cálculos sencillos dan

$$\pm\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a\rho}d\rho = d\phi,$$

donde ρ es la distancia de A a O y ϕ el ángulo entre la vertical descente y OA. Para que la evolvente gire contra las agujas hay que tomar el signo $+$ e integrando desde $\rho = a$, $\phi = 0$ se tiene

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} - \mathrm{arcsec}\frac{\rho}{a} = \phi.$$

Esta ecuación expresa que en la figura el ángulo polar ϕ de A es la diferencia entre el ángulo polar $t = \sqrt{\rho^2 - a^2}/a$ de B y el ángulo AOB.

J. M. Sanz-Serna
Universidad de Valladolid