El método de Euler de integración numérica

J. M. SANZ-SERNA[*]
De la Real Academia de Ciencias

1. INTRODUCCIÓN

Había pensado contribuir al ciclo *La obra de Euler (tricentenario)* del Instituto de España con un trabajo sobre *El Análisis Numérico en Euler*. Algún duende de imprenta hizo que en el díptico anunciador del curso el título se mudase, sin advertirlo yo, por el, mucho más restringido, *El método de Euler de integración numérica*. Tras reflexionar, he decidido limitar mi ámbito al del título anunciado. Por tanto dejaré en el tintero o en el teclado algunas materias que tenía previsto tratar[1] (la fórmula de Euler-Maclaurin y su aplicación a sumar series; la interpolación de los valores de $n!$ mediante la función Gamma, expresada primero como un producto infinito y más tarde en forma integral; la obtención por Euler de la ecuación de Euler-Lagrange mediante un proceso de discretización que anticipa las técnicas de diferencias finitas y elementos finitos). No lamento estas omisiones: por mucho que se presentase de la obra de Euler, siempre sería poco frente a los aspectos que quedasen sin tratar. La merma en el número de temas me permitirá una exposición menos telegráfica y me dejará margen para valorar el impacto del método de integración de Euler a lo largo de la historia.

No debo cerrar esta breve introducción sin dejar constancia de mi deuda con mi colega de Ginebra, Prof. Dr. Gerhard Wanner, que muy

---

[*] *http:/hermite.mac.cie.uva.es/sanzserna*

[1] Sobre los puntos omitidos pueden verse, en otros, los libros Goldstine, H. H., *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer, New York, 1977; Hairer, E., Wanner, G., *Analysis by its history,* Springer, New York, 1997.

generosamente me ha facilitado materiales empleados por él en conferencias sobre Euler presentadas en diversos foros a lo largo de este año del tricentenario.

2. EULER Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales nacieron en el siglo XVII, en simultaneidad estricta con el Cálculo Infinitesimal[2]. Con frecuencia, la solución de los problemas mecánicos, geométricos o de otra índole que dieron origen a los conceptos de derivada e integral no requiere encontrar una primitiva o una derivada, sino determinar una función desconocida a partir de una relación que la liga con su derivada: en otras palabras, determinar las soluciones de una ecuación diferencial. En palabras de Newton, *Data aequatione quotcumque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*[3].

Como, de un lado, las ecuaciones diferenciales sirven para dotar de expresión matemática a la mayoría de las leyes de la Física y de otras ciencias y, al mismo tiempo, no existe un 'método general' para resolverlas, no es de extrañar que se lleven más de trescientos años de esfuerzos ingentes dedicados a la tarea de estudiarlas. Y, naturalmente, una figura del calibre de Euler no pudo dejar de prestarles atención continuada a lo largo de su vida. De hecho, un buen número de los primeros trabajos del matemático de Basilea corresponden a este campo, incluyendo su temprana aportación de 1727[4] al problema de las

---

[2] Una referencia muy recomendable sobre estos temas es Hairer, E., Norsett, S. P., Wanner, G., *Solving ordinary differential equations I, Nonstiff problems, 2nd ed.,* Springer, Berlin, 1993. La Sección I.2 contiene ejemplos detallados del tratamiento de las ecuaciones diferenciales por los pioneros del Cálculo Infinitesimal. Estos ejemplos incluyen el *Problema II, Solutio Casus II, Ex. I,* de *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* de Newton (1671) (resuelto empleando series de potencias) y la solución por Leibniz al problema que le fue propuesto en 1674 de encontrar la ecuación de la curva hoy llamada tractriz (descrita por un reloj de bolsillo que es arrastrado sobre una mesa por su cadena cuando se desliza el extremo libre de ésta sobre uno de los bordes —rectos— de la mesa).

[3] Para Arnold (Arnold, V. I., *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, 2nd ed.,* Springer, New York, 1988) estas palabras describen la contribución que Newton más valoraba entre todas las suyas.

[4] **(E3)** *Methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas*. Como es común, uso la notación **(Em)** para referirme a la mésima obra de Euler según la catalogación de Gustav Eneström, $1 \leq m \leq 866$. Este catálogo puede consultarse, por ejemplo, en *www.math.dartmouth.edu/euler/index/enestrom.html*. Desde esta dirección puede accederse a toda la obra de Euler.

trayectorias recíprocas[5], que contribuyó a crear la fama del entonces jovencísimo autor.

En 1728[6] y 1743[7] Euler fue el primero, tras Riccati, en atacar ecuaciones de orden superior[8]

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \cdots + \frac{Nd^ny}{dx^n},$$

donde la substitución $y = e^{\int p\,dx}$ le conduce a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{\int p\,dx} p, \\ \frac{ddy}{dx^2} &= e^{\int p\,dx}\left(pp + \frac{dp}{dx} \right), \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= e^{\int p\,dx}\left(p^3 + \frac{3pdp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2} \right), \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

y le permite bajar el orden en una unidad *('remanebit aequatio differentialis gradus n – 1')*. Cuando *A, B, C*, ... son constantes, *p* se busca también constante y se obtienen inmediatamente las soluciones.

Tan sólo desde la base de ecuaciones diferenciales de la que acabamos de dar algunas muestras, se entienden los prolongados éxitos de Euler, a partir de *Mechanica sive motus sciencia analytice exposita* **(E15)** (1736), en el tratamiento analítico de los problemas de la Mecánica, desde los relativos a masas puntuales a los referentes a sólidos rígidos o elásticos, sin olvidar los correspondientes a los medios fluidos.

---

[5] Dos curvas planas son recíprocas si al trasladarse paralelamente a sí mismas se intersecan siempre ortogonalmente.

[6] **(E10)** *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus.*

[7] **(E62)** *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum.*

[8] A veces —no siempre— he conservado la notación del propio Euler y he retenido expresiones, en latín o traducidas por mí al castellano, de los publicaciones originales. Estan expresiones se dan entrecomilladas.

Hacia 1750 *(Découverte d'un nouveau principe de Mécanique* **(E177)**) alcanzó Euler plena consciencia de que las ecuaciones diferenciales

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}, \quad \frac{ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M},$$

llamadas de Newton a pesar de no aparecer como tales en ningún punto de la obra del inglés, representan el principio fundamental de la Mecánica. No es éste el lugar de argumentar si realmente sería o no más justo llamar de Euler a las ecuaciones que expresan la segunda ley de Newton. Nuestro objetivo es tomar en consideración el tratamiento de Euler de los métodos numéricos para la integración[9] de ecuaciones diferenciales, campo en el que nadie le discute su absoluta prioridad.

3. EL MÉTODO DE EULER DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

A grandes rasgos, se puede decir que las primeras contribuciones, en el siglo XVII, a la integración de las ecuaciones diferenciales buscaron la hoy llamada (de modo confundente)[10] integración elemental, es decir la reducción mediante cambios de variables, manipulaciones algebraicas y otros artificios, a menudo ingeniosos y altamente específicos, a problemas de cuadraturas. La incapacidad de los métodos elementales para integrar algunos problemas importantes[11] pronto fue aparente y se introdujeron técnicas de mayor potencia y generalidad, como la solución por

[9] Seguimos la terminología tradicional y universalmente admitida: la palabra *integración* hace referencia a la solución de ecuaciones diferenciales y no al cálculo de integrales, definidas o indefinidas (primitivas). A este cálculo se le denomina, por razones históricas, *cuadratura,* ya que integral se corresponde con área y los antiguos asociaban las áreas de recintos arbitrarios a las de cuadrados (considérese p. ej. la expresión *metros cuadrados).* En especial, los términos *cuadratura del círculo* hacen referencia a un problema clásico de la Matemática griega (dado un círculo en el plano construir con regla y compás un cuadrado de la misma área), por más que en nuestro país se usen como sinónimos de *quimera* o para aludir a intentos de buscar *tres pies a los gatos*. La imposibilidad de la construcción demandada por la cuadratura del círculo sólo se establecio en fecha relativamente reciente por Lindemann.

[10] *Elemental* se refiere a la necesidad de restringirse a la clase de funciones llamadas elementales. No debe interpretarse como sinónimo de sencillo o fácil.

[11] Conviene dejar constancia aquí de que la falta de éxito en la integración efectiva de las ecuaciones diferenciales, a pesar de la amplia gama de técnicas introdu-

series, empleada ya por el propio Newton[12]. Aunque hoy día disponemos de una panoplia amplísima de armas con que acometer la integración de las ecuaciones diferenciales, no es exagerado afirmar que en la práctica, son los métodos numéricos, introducidos por Euler, los que permiten en toda clase de situaciones dar soluciones efectivas con éxito.

En **(E342)**, 1768, *Institutionum Calculi Integralis, Volumen Primum,* en la Sección II *De integratione aequationum differentialum,* Capítulo VII *De integratione aequationum differentialium per approximationem* arranca la historia de los métodos numéricos para las ecuaciones diferenciales.

Euler comienza el capítulo planteando y resolviendo el problema de hallar, de manera 'verdaderamente aproximada,' la integral de una ecuación diferencial *cualquiera (Problema 85: Proposita aequatione differentiali quacumque, ejus integrale completum vero proxime assignare).*

Sea $\frac{\partial y}{\partial x} = V$ (con V *'functione quacumque ipsarum e x et y')* la ecuación diferencial y sean a, b valores correspondientes dados de las variables x e y. Euler observa que, para $x = a + \omega$, con ω una *'particula minima',* el valor de y discrepará de modo mínimo de b y por ello 'podemos ver' que V permanece constante. Entonces, si V es el valor (constante) correspondiente a $x = a$, $y = b$, para la *'exigua mutatione'* de a a x tenemos $\frac{\partial y}{\partial x} = A$ e, integrando, $y = b + (x - a) A$ [13]. Así se pasa de los valores $x = a$, $y = b$, a los nuevos $x = a + \omega$, $y = b + A\omega$ y procediendo sucesivamente de este modo por 'intervalos mínimos' se pueden alcanzar valores de x e y *'quamtumvis remotos'.*

---

cidas en los siglos XVIII y XIX, iba a conducir a importantes desarrollos, dando origen a ramas enteras de la ciencia matemática. Ante todo, la solución por series actúa como uno de los motores para el estudio de las llamadas Funciones Especiales. De otro lado, cuando la solución no puede ser explícitamente exhibida, ni en términos de funciones elementales, ni en términos de series o funciones especiales, se hace preciso indagar su misma existencia y unicidad. Esto suscita una serie de investigaciones que comienzan con Cauchy y que acabarán dando origen al Análisis Funcional. Los Grupos de Lie se introdujeron para delimitar las posibilidades de la integración elemental. También, y a partir sobre todo de Poincaré y Liapunov, se investigan las propiedades cualitativas de las soluciones, contribuyendo al nacimiento de la Topología y de la moderna teoría de los Sistemas Dinámicos.

[12] Ver por ejemplo la referencia en la nota 2.

[13] Geométricamente es bien conocido y obvio que se está reemplanzando la curva integral por su tangente en (a, b), pero esta consideración no es hecha por el autor suizo. Tras varios pasos, la curva integral quedará aproximada por la poligonal resultante de yuxtaponer los sucesivos tramos de tangentes: de ahí el nombre de 'método de la poligonal' con el que, a veces, se alude a este algoritmo.

Euler recomienda, a efectos de lograr 'más claridad para los ojos', disponer los cálculos en una tabla

$$\begin{array}{cccccc} x & a, & a', & a'', & a^{IV}, & \ldots \\ y & b, & b', & b'', & b^{IV}, & \ldots \\ V & A, & A', & A'', & A^{IV}, & \ldots \end{array}$$

donde, primero, con $x = a$, $y = b$ formamos $V = A$, y, de modo sucesivo, $b' = b + A\,(a' - a)$, A' es el valor correspondiente a $x = a'$, $y = b'$, etc. Construir una nueva columna de la tabla es lo que actualmente se denomina efectuar un paso del método.

4. MÉTODOS DE MAYOR ORDEN

Si bien el llamado 'método de Euler' que acabamos de describir forma parte de la cultura general matemática, no es tan conocido el hecho de que también se deben a nuestro autor los primeros métodos numéricos de más precisión. En efecto, en el capítulo que vengo glosando, el Problema 86 pide *'methodum praecedentem, aequationes differentiales proxime integrandi, magis perficere, ut minus a veritate aberret',* perfeccionar más el método precedente de integración aproximada de ecuaciones diferenciales para que se separe menos de la verdad. En notación moderna, la solución dada por Euler consiste en substituir en cada paso el desarrollo

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x)$$

en que se basa el método de la sección anterior, por un desarrollo de Taylor de orden superior[14]:

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2 y''(x) + \cdots + \frac{1}{n!}h^n y^{(n)}(x). \tag{1}$$

[14] No hay lugar a confudir el método numérico aquí descrito con el de solución por series que —como vimos— se remonta a Newton. En la solución por series, x y $x + h$ corresponden, respectivamente, al valor inicial y final de la variable independiente; en principio se haría $n \to \infty$ (aunque —naturalmente— es concebible restringirse a aproximaciones con n grande). En el método numérico, es finito y probablemente no muy grande, h es un valor pequeño y x, $x + h$ corresponden al valor de la variable independiente al comenzar y concluir uno de los pasos. La convergencia del método de so-

Como antes, el valor *y' (x)* se obtiene de la ecuación diferencial que se integra

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

mientras que los valores de *y'' (x)*, ..., $y^{(n)}$ *(x)* se pueden hallar derivando en la misma mediante la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx} f = f_x + f_y y' = f_x + f_y f, \\ y''' &= \frac{d}{dx}[f_x + f_y f] = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_x + f_y f), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Así para el caso

$$y' = x^2 + y^2, \tag{4}$$

el propio Euler nos proporciona, a título de ejemplo:

$$\begin{aligned} y'' &= 2x + 2x^2 y + 2y^3, \\ y''' &= 2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2 y^2 + 6y^4, \\ y^{(iv)} &= 4y + 12x^3 + 20xy^2 + 16x^4 y + 40x^2 y^3 + 24y^5 \\ y^{(v)} &= 40x^2 + 24y^2 + 104x^3 y + 120xy^3 + 16x^6 + 156x^4 y^2 \\ &\quad + 240x^2 y^4 + 120y^6. \end{aligned} \tag{5}$$

Los cálculos pronto se complican, aun para una ecuación tan sencilla como la considerada.

El método que acabamos de describir se conoce en la literatura sobre Análisis Numérico como 'método de Taylor de orden *n*': no cabe duda de que 'método de Euler de orden *n*' hubiese sido una denominación más precisa históricamente, con la ventaja adicional de recordar que para *n* = 1 se recae en el algoritmo de la poligonal.

---

lución por series al hacer crecer exige la analiticidad de la solución y, para un valor dado de *h*, puede darse o no de acuerdo con el valor del radio de convergencia de la serie de Taylor. La aplicabilidad del método numérico no sufre estas limitaciones.

5. VALORACIÓN

¿Qué suerte han corrido en sus dos siglos y medio de vida los métodos numéricos[15] sugeridos por Euler?

Antes de responder debemos hacer algunas consideraciones generales. Hacia 1850[16] Adams, descubridor de Neptuno, generaliza el método de la Sección 3 en un sentido distinto al contemplado en la Sección 4; Adams muestra cómo incrementar el orden de precisión del método sin necesidad de recurrir a pesadas diferenciaciones sucesivas de la ecuación $y' = f(x, y)$. La otra gran familia de métodos numéricos fue concebida por Runge y Kutta en los albores del siglo XX; los métodos Runge-Kutta tampoco requieren diferenciaciones sucesivas.

A pesar de que, como acabamos de indicar, los métodos numéricos para integrar ecuaciones diferenciales poseen una genealogía ciertamente distinguida, puede afirmarse que hasta mediados del siglo XX estuvieron confinados a un papel marginal en el panorama global de la Matemática. Hay que recordar que cuando las operaciones aritméticas debían llevarse a cabo sin más herramientas que el papel y el lápiz, con el auxilio de calculadoras mecánicas a lo sumo, el empleo efectivo de las aproximaciones numéricas era en algunos casos sencillamente imposible. En otros, constituía una tediosa tarea, un enorme esfuerzo en términos de tiempo y recursos. Esta razón llevaba a favorecer las técnicas analíticas sobre las numéricas. La situación ha cambiado hoy radicalmente gracias a la disponibilidad de ordenadores electrónicos digitales que han incrementado y siguen incrementado de modo sencillamente inverosímil la posibilidad de llevar a cabo cálculos aritméticos cada vez más complejos en tiempos cada vez más breves, permitiendo así la resolución de problemas antes inasequibles, con el resultado final de un gran florecimiento de las técnicas numéricas.

---

[15] Si bien Euler consideró únicamente el caso de una sola ecuación (2) con una sola función incógnita y, la extensión de sus métodos al caso de sistemas de m ecuaciones de primer orden con m incógnitas y_i es inmediata. De hecho, cuando se usa la notación vectorial, basta con recoger las m funciones y_i como componentes de un vector y, para que fórmulas como (1) sean aplicables sin más. Es bien conocido cómo los sistemas de orden superior pueden reducirse a sistemas de primer orden mediante la introducción de nuevas funciones incógnitas y de ello resulta que los métodos considerados hasta ahora (así como los de Adams o Runge-Kutta) sean aplicables a todos los problemas de ecuaciones diferenciales y no sólo a la ecuación escalar de primer orden.

[16] Una historia de los métodos numéricos de integración puede verse en mi discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, disponible en *http:/hermite.mac.cie.uva.es/sanzserna.*

No debe concluirse de esto que los métodos numéricos modernos sean hijos del ordenador. La realidad es precisamente la contraria: los ordenadores fueron concebidos como herramientas para posibilitar el tratamiento numérico de problemas, fundamentalmente en el ámbito de las ecuaciones diferenciales, cuya solución, siendo importante para alguna aplicación, no era alcanzable por técnicas analíticas. No es por tanto aventurado afirmar que debemos los ordenadores a la necesidad de emplear métodos numéricos para resolver problemas de ecuaciones diferenciales.

Tras estas puntualizaciones reformulemos nuestra pregunta: ¿Se utilizan hoy los métodos numéricos sugeridos por Euler? Ciertamente, el más sencillo, comentado en la Sección 3, está en plena vigencia. Ante todo, juega un papel privilegiado y ubicuo en la didáctica de los métodos numéricos. Pero también se emplea como método efectivo en aquellos problemas tan complejos —como algunos que provienen de discretizar ecuaciones en derivadas parciales— donde no es posible aplicar técnicas más sutiles.

¿Tienen ahora valor los métodos de la Sección 4? He aquí una pregunta difícil de responder. Como con el proverbial gallego, uno no acaba de saber si estos métodos están yéndose, por no ser competitivos con los de Adams o Runge-Kutta, o por el contrario están llegando triunfadores, convenientemente puestos al día. El talón de Aquiles de los métodos basados en el desarrollo de Taylor es la necesidad de hallar los valores de las derivadas sucesivas $y^{(n)}(x)$ en (1). Frente a ellos, los métodos de Adams o Runge-Kutta solo precisan evaluar la función f en (2), lo que posibilita la escritura de paquetes de ordenador en los que se codifica de una vez por todas el método y son aplicables *a todas* las ecuaciones diferenciales: cuando se van a emplear para una ecuación en concreto, al usuario le basta con escribir una subrutina que retorne el valor de f correspondiente a valores dados de sus argumentos x e y. Pero, por otro lado, (si se suponen disponibles los valores de las derivadas sucesivas) los métodos del desarrollo de Taylor no carecen de atractivos: permiten obtener órdenes de precisión arbitrariamente altos (a diferencia de los Runge-Kutta explícitos) y (a diferencia de los de Adams) son muy sencillos de implementar y se prestan bien a estrategias de estimación del error y de variación del paso[17]. Por estos rasgos positivos, en las últimas décadas no ha dejado nunca de haber autores que relancen los métodos de la Sección 4. Invariablemente tales *rentrées* de los métodos pasan por el redescubrimiento,

[17] Estas estrategias son ya anunciadas por Euler en los Corolarios 2 y 3 de los §658 y 659!

una y otra vez, de una estrategia alternativa a la diferenciación sucesiva (3) para hallar los coeficientes de las potencias de h en el desarrollo (1). Ilustraremos en el caso particular del ejemplo (4) el uso de esta estrategia alternativa, que es muy general y se presta a automatización en el ordenador[18]. Conocidos los valores a de x y b de y al comienzo del paso, el siguiente valor de y, correspondiente a $x = a + h$, será

$$y = b + h\alpha + h^2\beta + h^3\gamma + h^4\delta + h^5\varepsilon + h^6\zeta + \cdots$$

y nuestra tarea es determinar los coeficientes α, β, ... Derivando,

$$y' = \alpha + 2h\beta + 3h^2\gamma + 4h^3\delta + 5h^4\varepsilon + 6h^5\zeta + \cdots,$$

y esto debe coincidir, a la vista de (4), con

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a+h)^2 + (b + h\alpha + h^2\beta + h^3\gamma + h^4\delta + \cdots)^2 \\ &= (a^2+b^2) + h(2\alpha b + 2a) + h^2(2\beta b + \alpha^2 + 1) + \cdots \end{aligned}$$

de donde, al igualar según potencias de h, obtenemos las fórmulas

$$\begin{aligned} \alpha &= aa + bb, \\ 2\beta &= 2\alpha b + 2a, \\ 3\gamma &= 2\beta b + \alpha\alpha + 1, \\ 4\delta &= 2\gamma b + 2\alpha\beta, \\ 5\varepsilon &= 2\delta b + 2\alpha\gamma + \beta\beta, \\ 6\zeta &= 2\varepsilon b + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma, \end{aligned} \tag{6}$$

que permiten de modo recurrente el cómputo *numérico* de los valores requeridos sin hallar derivadas. Ciertamente una alternativa muy ventajosa sobre las fórmulas analíticas (5). Ventajosa, pero no innovadora, a pesar de sus constantes redescubrimientos: las expresiones (6) están tomadas del Escolio del §663 de **(E342)**. ¡Euler[19] ya sabía que era posible implementar sus métodos sin derivar!

¿Fue Laplace quien nos encomendó: Lisez Euler?

---

[18] Ver, por ejemplo, I.8 del tratado de Hairer, Nørsett, Wanner citado más arriba.

[19] *'Quoniam totum negotium ad inventionem horum coefficientium redit, observo eosdem sine differentiatione inveniri posse,'* es decir, 'dado que todo el trabajo va a parar a hallar estos coeficientes, observo que los mismos pueden ser hallados sin diferenciación'.