Lección 3

Splines

3.1 Definición y construcción de splines cúbicos

El espacio $M_1^3(\Delta)$ es claramente un subespacio del $M_0^3(\Delta)$, donde a los segmentos cúbicos sólo se les exige coincidir en los nodos. Dar n segmentos cúbicos equivale a dar n cuaternas de números reales, y por ello puede hacerse con $4n$ grados de libertad. No todas de esas $4n$ elecciones conducen a elementos de $M_0^3(\Delta)$, puesto que para que un grupo de n cuaternas defina una función continua en $[a, b]$ han de imponérsele las $n-1$ condiciones independientes que expresan la continuidad en cada nodo interno $x_2, \ldots, x_{n-1}$. Con $4n$ parámetros y $n-1$ condiciones, restan $3n+1$ parámetros libres en $M_0^3(\Delta)$, que, como sabemos, se pueden usar, por ejemplo, para reproducir los valores de una función dada en los $n+1$ nodos de la partición y los $2n$ puntos que sirven para dividir los subintervalos de la misma en tres partes iguales.

Ahora para que un grupo de n cuaternas defina una función de $M_1^3(\Delta)$ habremos de imponerle las $n-1$ condiciones anteriores de continuidad en los nodos internos y otras $n-1$ nuevas condiciones para la continuidad de la derivada. Así $M_1^3(\Delta)$ tiene, como vimos, dimensión $4n - 2(n-1) = 2n + 2$, número igual al de condiciones en (2.11). En resumen al pasar de $M_0^3(\Delta)$ a $M_1^3(\Delta)$ *se incrementa la regularidad de los interpolantes, a costa de sacrificar el número de grados de libertad*; es decir, de condiciones que se pueden exigir a los mismos.

3.1.1 Siguiendo en la línea anterior es todavía posible considerar el espacio $M_2^3(\Delta)$, llamado de splines (*léase splains*) cúbicos, formado por las funciones de clase C^2 en $[a, b]$ que restringidas a cada subintervalo de la partición coinciden con un polinomio cúbico. Supongamos que tenemos un elemento de $M_1^3(\Delta)$ dado por sus segmentos polinómicos en la forma (2.14), con los coeficientes obtenidos, vía (2.15), de los $2n+2$ parámetros libres H_i, H_i', $i = 0, \ldots, n$. Dado que, con frecuencia los valores de $f'(x_i)$ son desconocidos y es preciso aplicar unos valores apróximados a los mismos como condiciones H_i' para establecer el interpolante de Hermite, se aprovecha esta libertad de elección para imponer que la segunda derivada del interpolador a trozos resulte también continua. Las H_i' resultarán ahora incógnitas de un sistema lineal de ecuaciones.

En efecto, para que tal elemento esté en $M_2^3(\Delta)$ se necesita y basta con que coincidan las evaluaciones en x_i, $i = 1, \ldots n-1$ de la derivada segunda de los segmentos polinómicos $H^{(i)}$, $H^{(i+1)}$ correspondientes a $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$. Por (2.14), la evaluación en el segmento a la izquierda de x_i conduce a

$$2H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}] + 6H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}](x_i - x_{i-1}),$$

que usando (2.15) equivale a

$$\frac{-6H[x_{i-1}, x_i] + 2H'_{i-1} + 4H'_i}{x_i - x_{i-1}}. \tag{3.1}$$

Por otro lado la derivada segunda en x_i utilizando el segmento a la derecha es claramente $2H^{(i+1)}[x_i, x_i, x_i]$, o por (2.15) (con i en vez de $i-1$)

$$\frac{6H[x_i, x_{i+1}] - 4H'_i - 2H'_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}. \tag{3.2}$$

Igualando (3.1) y (3.2) para $i = 1, \ldots, n-1$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que una función cúbica de Hermite a trozos satisface si y sólo si es un spline cúbico

$$\begin{gathered}\frac{1}{x_i - x_{i-1}} H'_{i-1} + \left(\frac{2}{x_i - x_{i-1}} + \frac{2}{x_{i+1} - x_i} \right) H'_i + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} H'_{i+1} = \\ 3 \left(\frac{H_i - H_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{H_{i+1} - H_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} \right)\end{gathered} \tag{3.3}$$

Observamos que el número de incógnitas es $n+1$ por lo que el sistema admite infinitas soluciones. Concretamente, disponemos de dos grados de libertad para generar una familia doblemente infinita de *splines*. A la misma conclusión se puede llegar razonando sobre las dimensiones de los espacios, pues si a los $2n+2$ grados de libertad que nos quedaban, les restamos las $n-1$ nuevas condiciones impuestas, resultan $n+3$ (la dimensión del espacio de *splines* cúbicos) y como sólo disponemos de los $n+1$ valores en los puntos para determinarlos, aún disponemos de dos grados de libertad para exigir alguna otra cualidad del *spline* solución.

La elección de una u otra de estas soluciones puede hacerse en base a distintos principios: bien añadiendo nuevas condiciones que se traducen en un aumento del número de ecuaciones para el sistema (véase el problema 3.3.2), bien eliminando alguna de las incógnitas mediante la adjudicación de un valor a las mismas. El caso más frecuente es el siguiente:

3.1.2 Supongamos que además de H_i, $i = 0, \ldots, n$, también conocemos H'_0, H'_n. Entonces (3.3) es el sistema lineal de $n-1$ ecuaciones para las $n-1$ pendientes incógnitas H'_i, $i = 1, \ldots, n-1$ con matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_2} & \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3} & \frac{1}{h_3} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{h_i} & \frac{2}{h_i} + \frac{2}{h_{i+1}} & \frac{1}{h_{i+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{h_{n-2}} & \frac{2}{h_{n-2}} + \frac{2}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{2}{h_{n-1}} + \frac{2}{h_n} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

y término independiente el vector

$$\begin{pmatrix} 3\left(\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}\right)-\frac{1}{h_1}H'_0 \\ 3\left(\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\frac{d_i}{h_i}+\frac{d_{i+1}}{h_{i+1}}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\frac{d_{n-2}}{h_{n-2}}+\frac{d_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \\ 3\left(\frac{d_{n-1}}{h_{n-1}}+\frac{d_n}{h_n}\right)-\frac{1}{h_n}H'_n \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

donde de nuevo hemos abreviado en la escritura, siendo

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{y} \quad d_i = H[x_{i-1}, x_i] = \frac{H_i - H_{i-1}}{h_i}$$

.

La correspondiente matriz se llama *tridiagonal*, porque sus elementos no nulos sólo se encuentran en la diagonal principal y las dos a ella adyacentes y *estrictamente diagonalmente dominante* porque en cada fila el término diagonal excede a la suma de los módulos de los restantes elementos. Se demuestra (cuestión 3.3.4) que A es regular, con lo que (3.3) tiene solución única y hemos probado:

PROPOSICION

Dada una función f en $[a, b]$, derivable en a y en b, existe un único elemento S de $M_2^3(\Delta)$ tal que

$$S(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n, \qquad S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b).$$

Este *spline* S se llama el interpolante *completo* de f. En síntesis, para manejar S ante todo resolveremos el sistema (3.4), (3.5) para hallar las pendientes del spline en los nodos (¡que NO coincidirán en general con las de f!), luego iremos a (2.15) para hallar los $4n$ coeficientes de los segmentos cúbicos, que quedarán almacenados. Cada vez que sea preciso evaluar S en un punto x^* comenzaremos por determinar en qué subintervalo se halla x^* y luego evaluaremos la correspondiente cúbica (2.14) por medio del algoritmo de Horner.

Para el *spline* interpolante completo S de f se demuestra que, para x en $[a, b]$

$$|f(x) - S(x)| \leq (5/384)h^4 M_4,$$

donde, como siempre, h es el diámetro de la partición y M_4 una cota superior de la derivada cuarta de f.

3.1.3 Ejemplo Comsideremos un ejemplo muy sencillo que nos ayude a fijar todas estas ideas. A partir de la siguiente tabla de valores

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	4	7
$f'(x)$	1	-1	2	3

calcularemos el interpolante cúbico de Hermite a trozos $H(x)$ y dos *splines*: el interpolante completo $S_1(x)$ en base a las derivadas conocidas en los extremos y el *spline* natural $S_2(x)$ para el supuesto en que estas fuesen desconocidas (véase el ejercicio 3.3.3).

Comencemos por el interpolante de Hermite. El primer trozo $H^{(1)}(x)$ es muy fácil de escribir en base a la siguiente tabla de diferencias divididas con puntos repetidos

x	y	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$
1	$\underline{3}$			
1	$\underline{3}$	$\underline{1}$		
2	$\underline{5}$	2	1	
2	$\underline{5}$	$\underline{-1}$	-3	-4

donde el significado del subrayado ya es conocido por el lector. Resulta pues

$$H^{(1)}(x) = 3 + (x-1) + (x-1)^2 - 4(x-1)^2(x-2)$$

que puede transformarse en múltiples expresiones de potencias según las necesidades y el uso que se le vaya a dar. Aunque es evaluable de manera muy eficiente en esta representación de Newton, mediante la regla de Horner, en general aporta más información un desarrollo de Taylor en el extremo inferior del intervalo. Una única aplicación del problema 2.5.4 con $x^* = 1$ nos permite obtener el dato que nos falta: la segunda derivada en dicho punto (o más exactamente su mitad). Así resulta finalmente

$$H^{(1)}(x) = 3 + (x-1) + 5(x-1)^2 - 4(x-1)^3$$

La expresión de los otros dos trozos en la misma versión es

$$H^{(2)}(x) = 5 - (x-2) - 3(x-2)^2 + 3(x-2)^3$$

y

$$H^{(3)}(x) = 4 + 2(x-3) + 2(x-3)^2 - (x-3)^3$$

y en su conjunto aparece en la figura 3.1 como una línea continua. Tabulamos los valores de sus derivadas a la izquierda y a la derecha de los nodos, para comparar posteriormente con lo que sucede en los *splines* que construiremos

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	4	7
$f'(x)$	1	-1	2	3
$f''_-(x)$		-14	12	-2
$f''_+(x)$	10	-6	4	
$f'''_-(x)$		-24	18	-6
$f'''_+(x)$	-24	18	-6	

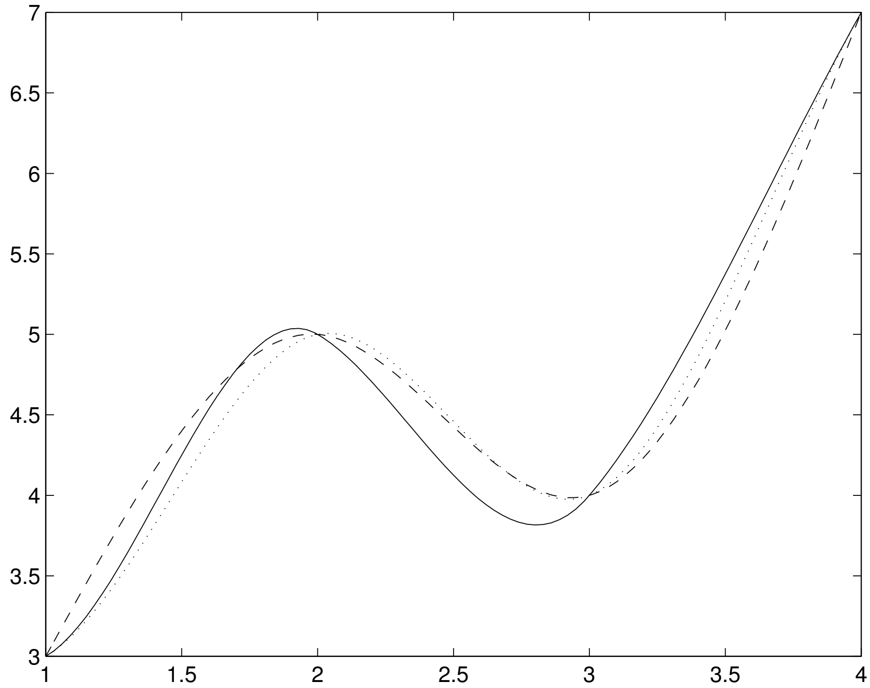

Figura 3.1: La cúbica de Hermite a trozos y los *splines* completo y natural

Para el cálculo del interpolante completo, el sistema que resulta es el siguiente

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1' \\ H_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

cuya solucción obvia es $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ respectivamente. En consecuencia, una vez conocidas todas las pendientes, los polinomios de cada segmento se pueden escribir en la misma forma que antes, resultando:

$$S_1^{(1)}(x) = 3 + (x-1) + \frac{11}{3}(x-1)^2 - \frac{8}{3}(x-1)^3$$

$$S_1^{(2)}(x) = 5 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{13}{3}(x-2)^2 + 3(x-2)^3$$

$$S_1^{(3)}(x) = 4 + \frac{2}{3}(x-3) + \frac{14}{3}(x-3)^2 - \frac{7}{3}(x-3)^3$$

En su conjunto, el *spline* aparece en la figura 3.1 como una línea de puntos, y la tabla correspondiente a sus valores y derivadas laterales es

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	4	7
$f'(x)$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
$f''(x)$	$\frac{22}{3}$	$-\frac{26}{3}$	$\frac{28}{3}$	$-\frac{14}{3}$
$f'''_-(x)$		-16	18	-14
$f'''_+(x)$	-16	18	-14	

El *spline* natural se obtiene resolviendo un caso particular del sistema ampliado por la incorporacion de dos nuevas ecuaciones, las que resultan de expresar las derivadas segundas en los extremos. De (3.2) se obtiene que

$$\frac{6d_1 - 4H'_0 - 2H'_1}{h_1} = H''_0, \qquad \text{es decir,} \qquad 4\frac{H'_0}{h_1} + 2\frac{H'_1}{h_1} = 6\frac{d_1}{h_1} - H''_0$$

y de (3.1) que

$$\frac{-6d_n + 2H'_{n-1} + 4H'_n}{h_n} = H''_n, \qquad \text{es decir,} \qquad 2\frac{H'_{n-1}}{h_n} + 4\frac{H'_n}{h_n} = 6\frac{d_n}{h_n} + H''_n$$

lo que traducido a nuestro caso particular ($H''_0 = H''_n = 0$), y teniendo en cuenta que $d_1 = 2$ y $d_n = 3$, desemboca en el sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas que figura a continuación

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H'_0 \\ H'_1 \\ H'_2 \\ H'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

cuya solucción es $H'_0 = \frac{46}{15}$, $H'_1 = -\frac{2}{15}$, $H'_2 = \frac{7}{15}$ y $H'_4 = \frac{64}{15}$. Por tanto, procediendo como en el caso anterior , calculamos los polinomios de cada segmento, que resultan ser:

$$S_2^{(1)}(x) = 3 + \frac{46}{15}(x-1) - \frac{16}{15}(x-1)^3$$
$$S_2^{(2)}(x) = 5 - \frac{2}{15}(x-2) - 3.2(x-2)^2 + \frac{7}{3}(x-2)^3$$
$$S_2^{(3)}(x) = 4 + \frac{7}{15}(x-3) + 3.8(x-3)^2 - \frac{19}{15}(x-3)^3$$

En su conjunto, el *spline* aparece en la figura 3.1 como una línea de trazos, y la tabla correspondiente a sus valores y derivadas laterales es

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	4	7
$f'(x)$	$\frac{46}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{64}{15}$
$f''(x)$	0	-6.4	7.6	0
$f'''_-(x)$		$-\frac{32}{5}$	14	-7.6
$f'''_+(x)$	$-\frac{32}{5}$	14	-7.6	

3.2 B-splines y otras bases

El manejo de los *splines* en la forma descrita, tiene la ventaja de resultar muy eficiente cuando hay que evaluar la función en un determinado punto, pues basta determinar el subintervalo al que pertenece y utilizar el algoritmo de Horner en alguna de las variantes. Sin embargo, hemos visto que su construcción es un tanto compleja, pues hay que resolver un sistema de ecuaciones para determinar las pendientes y después calcular los coeficientes en cada uno de los subintervalos. Existen otras formas más eficientes de cosntruir los *splines*, aunque también tienen sus inconvenientes.

Lo ideal, a la vista de lo que ocurre con otros tipos de interpolación, sería encontrar una base $\{\Phi_j\}_{j=1}^{n+3}$ que nos permita expresar cualquier *spline* como una combinación lineal

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n+3} \lambda_j \Phi_j(x)$$

La primera base en que se piensa, teniendo en cuenta que estamos en un problema de interpolación, es en la formada por los *splines* denominados 'cardinales'. El elemento C_i sería tal que tomase el valor 1 en el punto x_i y 0 en todos los demás. La idea es conseguir, como en el caso de Lagrange o de Hermite, que los coeficientes fuesen los valores de interpolación. Pero vemos que de esta forma tendríamos sólo $n+1$ *splines* que no pueden ser una base del espacio M_2^3 (¿por qué?). De hecho resulta difícil completar esta base con dos elementos adicionales que nos permitiesen incorporar las habituales condiciones frontera tantas veces mencionadas. Además son funciones cuyo soporte no es local y para la evaluación del *spline* en cualquier punto se necesita disponer de todos los cardinales a la vez y este valor se ve influído por los cambios que se producen en cualquier punto por alejado que esté. Pero no hay que preocuparse, porque existen otras muchas opciones para construir una base.

Por ejemplo, resulta bastante sencillo construir una base utilizando la función x_+^n que, por definición vale x^n si $x \geq 0$ y 0 en otro caso. Dicho de otra forma, $(x - x_0)_+ = \max(0, x - x_0)$.

Entonces, si Δ es la típica partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$, se consideran por una parte las cuatro funciones

$$1, (x - x_0), (x - x_0)^2, (x - x_0)^3$$

y por otro, las $n - 1$ siguientes

$$(x - x_1)_+^3, (x - x_2)_+^3, \ldots, (x - x_{n-1})_+^3,$$

Es evidente que todas ellas son *splines* (¿por qué?), y que cualquier otro en $[a, b]$ puede escribirse en la forma

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \sum_{j=1}^{n-1} d_j(x - x_j)_+^3$$

pues lo que hacemos es: a partir de un polinomio inicial (de tercer grado) en el intervalo $[x_0, x_1]$, vamos añadiendo en todos los nodos interiores unos 'semipolinomios' (cúbicos también) que corrigen el anterior para que cumpla las condiciones de interpolación, respetando la continuidad hasta la segunda derivada. Es evidente que la tercera derivada sufre un salto de $6d_j$ en el punto x_j para $j = 1, 2, \ldots, n-1$. El cálculo de los coeficientes depende del tipo de condiciones que se impongan (además de las $n+1$ interpolatorias) y se presta a multiples opciones como hemos visto. La imposición de ambas condiciones en el punto x_0 haría especialmente sencillo el proceso, pero aún en el caso habitual de una condición en cada extremo el 'sistema' de ecuaciones que tenemos que resolver no tiene la dificultad de (3.4), (3.5). En realidad, se trata simplemente de arrastrar un parámetro hasta imponer la condición del extremo final.

Pero esta base de tan sencilla construcción presenta graves inconvenientes para la evaluación del *spline* resultante, no sólo por tener que calcular muchos términos cuando hay muchos subintervalos (ya habrá notado el lector que los elementos de esta base tampoco tienen carácter local), sino porque presenta graves pérdidas de precisión por la cancelación que se produce al tener que evaluar polinomios cúbicos en puntos muy alejados del nodo raíz, cuando trabajamos con intervalos amplios. Por otra parte, esta clara la asimetría de las funciones de la base.

Entre las bases del espacio $M_2^3(\Delta)$, la más útil la constituyen ciertos splines cúbicos llamados B-splines. El objetivo que se persigue con esta base es que sus elementos tengan las propiedades de que adolecen las que hemos mencionado: un soporte lo más pequeño posible, es decir que sean distintos de cero en el menor número de subintervalos que permita su condición de *splines* y que sean fáciles de calcular los coeficientes dadas las condiciones interpolatorias y 'frontera'.

Para definirlos, comencemos eligiendo 6 nodos suplementarios $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < a$, $x_{n+3} > x_{n+2} > x_{n+1} > b$. También consideraremos la función de dos variables $(t-x)_+^3$, que, por definición vale $(t-x)^3$ si $t \geq x$, y 0 en otro caso. Ahora para cada $i = -1, 0, 1, \ldots, n, n+1$ definimos una función real de variable real (B-spline) $B_i(x)$ como sigue:

$$B_i(x) = (x_{i+2} - x_{i-2})\{(. - x)_+^3[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]\}.$$

Aquí $(. - x)_+^3[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ representa la diferencia dividida cuarta, con respecto a los puntos x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2} de la función de la variable real t dada por $(t-x)_+^3$ (donde la x se considera como un parámetro). El valor de tal diferencia es un número real que depende del valor x en que se haya fijado el parámetro, y, justamente, $B_i(x)$ es el producto $(x_{i+2} - x_{i-2})$ por la diferencia. Note hay $n+3$ B-splines para una partición de $n+1$ puntos. Estos $n+3$ B-splines (restringidos a $[a, b]$) forman una base de $M_2^3(\Delta)$, y además una base de soporte local, pues el soporte de cada uno consta, cuando más, de cuatro subintervalos de la partición. (Cuestiones 3.3.17-3.3.18)

3.3 Cuestiones y problemas

3.3.1 *Caracterización variacional del spline interpolante completo. Significado de la palabra spline.* Demuestre que el spline cúbico interpolante completo de una función g es, de entre todas las funciones f de clase C^2 que coinciden con g en los nodos y satisfacen $f'(a) = g'(a)$, $f'(b) = g'(b)$ la única que hace mínima la integral en $[a, b]$ del cuadrado de f''. (Indicación: inspírese en lo hecho para la caracterización variacional del interpolante lineal a trozos.)

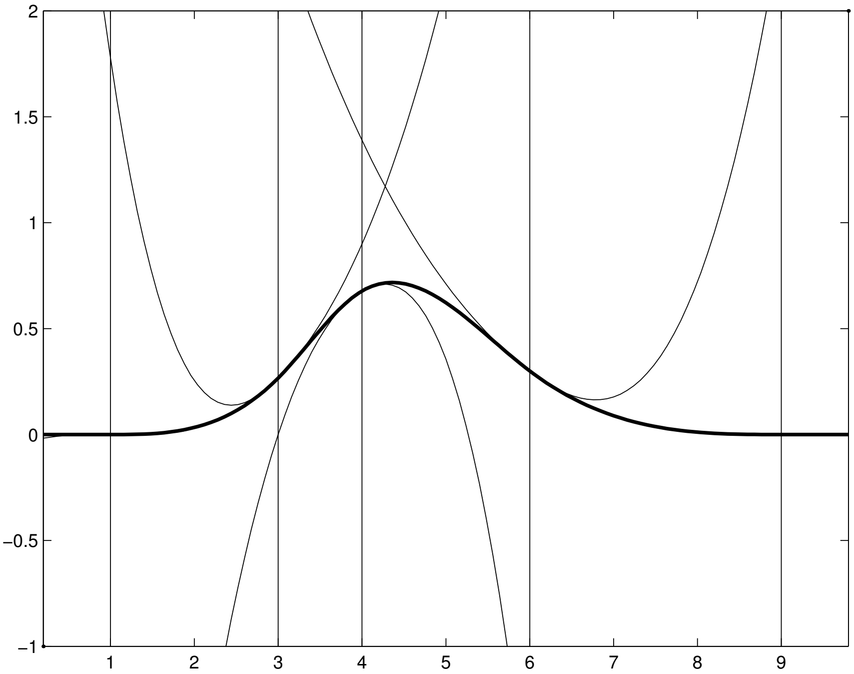

Figura 3.2: El B-spline [1 3 4 6 9] y sus polinomios componentes.

Como la integral en cuestión mide, en alguna manera, la curvatura de f (sería 0 si y solo si f fuese una recta), vemos que el interpolante completo es de entre todas las funciones que pasan por los puntos $(x_i, g(x_i))$ y tienen pendientes dadas en a y en b, la que menos se curva. En dibujo se usaban, para trazar una curva que se quería que pasase por puntos dados del plano, unas varillas de madera flexible fijadas en dichos puntos. En inglés esas varillas se denominaban splines. Como las varillas adoptan la posición de curvatura mínima (energía potencial mínima), se comprende que el nombre se extendiese a la función matemática que hoy conocemos como spline.

3.3.2 *Otras condiciones frontera para el spline cúbico.*

(i) Suponga que desconoce los valores de f' en a y b, pero conoce los de f''. Demuestre que, dada una partición, hay un único *spline* cúbico S en ella que coincide con f en cada nodo y tal que además $f'' = S''$ en $x = a, b$.

(ii) Suponga que no dispone ni de f' ni de f'' en los extremos del intervalo. Entonces, de entre la familia biparamétrica de splines cúbicos en una partición dada que coinciden con f en los nodos, conviene quedarse con el único que tiene derivada tercera continua en x_1, x_{n-1}. Pruebe que tal spline realmente existe y es único.

3.3.3 *Spline natural.* El spline cúbico s que coincide con una función dada g en los nodos de la partición y satisface $s''(a) = s''(b) = 0$ se llama spline natural de g. Dé una caracterización variacional del mismo.

3.3.4 *Matrices estrictamente diagonalmente dominantes.* Demuestre que la matriz A del sistema (3.3), como cualquier otra matriz estrictamente diagonalmente dominante, es regular. (Indicación: reducción al absurdo; si A no es regular existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$; si $\mathbf{v}$ tiene su componente de módulo máximo en el lugar i, tome la i-ésima componente de $A\mathbf{v}$ y vea que no puede ser nula.)

3.3.5 Sea S un *spline* cúbico con nodos $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Supongamos que en los dos intervalos $[t_1, t_2]$ y $[t_3, t_4]$, S se reduce a polinomios lineales. ¿Qué se puede decir de S sobre $[t_2, t_3]$?

3.3.6 Encontrar, calculando manualmente si es posible, el *spline* cúbico natural que interpola la siguiente tabla de valores

x	1	2	3	4	5
y	0	1	0	1	0

3.3.7 Describir explícitamente el *spline* cúbico natural que interpola una tabla con sólo dos entradas:

x	t_1	t_2
y	y_1	y_2

donde t_1 y t_2 son los nodos. Dar una fórmula para el *spline*.

3.3.8 Supongamos que $f(0) = 0$, $f(1) = 1.1752$, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 1.5431$. Determinar el interpolante polinomial cúbico $p_3(x)$ para estos datos. ¿Es un *spline* natural este interpolante?

3.3.9

a) Encontrar la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes para calcular el *spline* cúbico determinado por los datos siguientes y la condición de "sin nodo" en los extremos.

x	0.15	0.76	0.89	1.07	1.73	2.11
y	0.3945	0.2989	0.2685	0.2251	0.0893	0.0431

b) Resolver las ecuaciones por cualquier sistema, y determinar después las constantes de los diversos segmentos cúbicos. (Los datos son ordenadas de la función normal de probabilidad. Comparar algunos valores interpolados con los valores tabulados o calculados de la función, digamos en $x = 0.30, 0.80, 1.50$ y 2.00.

3.3.10 Considerar la siguiente tabla de datos (los cuales pertenecen obviamente a $f(x) = 1/x$)

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	1.000	0.667	0.500	0.400	0.333

Encontrar valores de $f'(x)$ y $f''(x)$ en $x = 1.5, 2.0$ y 2.5 del *spline* cúbico natural que aproxima a $f(x)$. Comparar con los valores analíticos de $f'(x)$ y $f''(x)$ para determinar sus errores.

3.3.11 Un *spline* cúbico *periódico* con nodos $t_0, t_1, \cdots, t_n$ se define como un *spline* cúbico $S(t)$ tal que $S(t_0) = S(t_n)$, $S'(t_0) = S'(t_n)$ y $S''(t_0) = S''(t_n)$. Se usa principalmente para ajustar datos de los que se conoce que se comportan de forma periódica. Desarrollar el análisis necesario para obtener un *spline* cúbico periódico para los datos de una tabla

x	t_0	t_1	$\dots$	t_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

donde se supone que $y_n = y_0$.

3.3.12 Encontrar un *spline* cúbico sobre los nodos $-1, 0, 1$ tal que $S''(-1) = S''(1) = 0$, $S(-1) = S(1) = 0$, y $S(0) = 1$.

3.3.13 Determinar a, b y c para que la siguiente función sea un *spline* cúbico.

$$S(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

3.3.14 ¿Existe una elección de los coeficientes para los que la siguiente función es un *spline* cúbico *natural*?

$$S(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \le x \le -1 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & -1 \le x \le 1 \\ x-1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

3.3.15 Determinar los coeficientes en la función

$$S(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & -9 \le x \le 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & 0 \le x \le 5 \end{cases}$$

de manera que sea un *spline* cúbico tomando el valor 2 cuando $x = 1$.

3.3.16 Determinar los coeficientes para que la función

$$S(x) = \begin{cases} x^2 + x^3, & 0 \le x \le 1 \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sea un *spline* cúbico con la propiedad de que $S'''(x) = 12$.

3.3.17 *Soporte de los B-splines.* Pruebe que los $n+3$ funciones B_i definidas en la sección 3.2, restringidas a $[x_{-3}, x_{n+3}]$ son elementos de $M_2^3\{x_{-3}, x_{-2}, ..., x_{n+3}\}$. Pruebe, sin efectuar ningún cálculo, que B_i es nula fuera del intervalo (x_{i-2}, x_{i+2}), $i = -1(1)n+1$. Utilice esto para ver que los $n+3$ B_i son linealmente independientes en $M_2^3\{x_{-3}, x_{-2}, \dots, x_{n+3}\}$. ¿Hay algún elemento de $M_2^3\{x_{-3}, x_{-2}, \dots, x_{n+3}\}$ que sea nulo fuera de (x_{i-2}, x_{i+1}), $i = -1(1)n+2$? (Indicación si lo hubiese sería una combinación lineal de las funciones $(x - x_{i-2})_+^3$, $(x - x_{i-1})_+^3$, $(x - x_i)_+^3$, nula junto con sus dos primeras derivadas en x_{i+1}. Concluya que los B_i tienen por soporte $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ (cuatro subintervalos contiguos de la partición) y que no hay splines con soporte más pequeño.

3.3.18 *Base de B-splines.* Pruebe que los B_i son una base del espacio de splines $M_2^3(\Delta)$. (Indicación: según hemos visto en el problema anterior los B_i son libres en $M_2^3\{x_{-3}, x_{-2}, \ldots, x_{n+3}\}$, muestre que una combinación lineal de los B_i que fuese nula en $[a, b]$ de hecho lo sería en $[x_{-3}, x_{n+3}]$, con lo cual también son libres en $M_2^3(\Delta)$.)

3.3.19 *Suma de los B-splines.* Pruebe que la suma de todos los B_i, evaluada en cada punto de $[a, b]$ es 1. Justamente para lograr esta propiedad se introduce el factor de escala (x_{i-2}, x_{i+2}) al definir B_i .

3.3.20 *B-splines en una partición uniforme.* Suponga que la partición Δ es uniforme de paso h, y que los puntos suplementarios x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} también se eligen con espaciado h. Pruebe que los B_i se obtienen transladando uno cualquiera de ellos, es decir $B_i(x) = B_j(x + (j - i)h)$. Halle explícitamente los B_i.