Lección 1

Polinomios de Chebyshev

1.1 Elección óptima de los nodos de interpolación

Supongamos fijados un intervalo $[a, b]$, una función real f definida en él y un número entero $n \geq 1$. ¿Cómo elegir $n+1$ nodos distintos $x_0, \ldots, x_n$ de suerte que, al efectuar la interpolación lagrangiana de f en $[a, b]$, el error tenga el menor tamaño posible? Sabemos que medir errores exactamente es muy difícil o imposible. Conviene entonces sustituir la cuestión anterior por otra más fácilmente resoluble ¿Cómo elegir $n+1$ nodos distintos $x_0, \ldots, x_n$ de suerte que al efectuar la interpolación lagrangiana de f en $[a, b]$ la *cota de error*

$$\frac{|W(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}$$

tenga el menor tamaño posible? Evidentemente la solución de este nuevo problema es, en cierta forma, independiente de la función f, y se reduce a encontrar los nodos para que el *tamaño* de $|W(x)|$ sea el menor posible. Recordemos que $W(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ y M_{n+1} es una cota de la derivada $n+1$ de f, que suponemos existe.

1.1.1 El concepto de norma para funciones Para poder abordar esta tarea es necesario, ante todo, definir precisamente qué entendemos por tamaño de una función. No hay duda sobre qué debemos entender por tamaño de un número real o complejo: su módulo. En la lección 2 establecimos el concepto para vectores reales o complejos n-dimensionales, evidenciando que existen infinitas posibilidades con significados diversos.

Pero ¿y para funciones?, ¿es la función real constantemente igual a 1 de mayor o menor tamaño que la función real $100\ e^{-x^2}$ (dibuje las gráficas)? La solución, una vez más, está en normar el correspondiente espacio vectorial.

1.1.2 Para funciones $v = v(x)$, reales o complejas, definidas en un intervalo $[a, b]$ son usuales las siguientes normas (similares a las definidas en la lección anterior para vectores):

Norma del supremo o norma infinito $\quad ||v||_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |v(x)|$

Norma dos $\quad ||v||_2 = \left(\int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

$$\textit{Norma uno} \qquad\qquad ||v||_1 = \int_a^b |v(x)|dx$$

Nótese que $||.||_\infty$ está definida no para todas las funciones sino tan solo para las acotadas. Análogamente las normas *dos ó uno* sólo pueden definirse para funciones cuyo cuadrado del módulo o cuyo módulo, respectivamente, sea integrable.

1.2 Los polinomios de Chebyshev

Hechas estas observaciones sobre la norma, podemos formular de modo preciso la cuestión que planteabamos al principio:

¿Cómo elegir los nodos de interpolación para que $||W||_\infty$ sea lo menor posible? La respuesta a esta pregunta fue encontrada por el matemático ruso Chebyshev (1821-1894) en términos de unos polinomios que hoy llevan su nombre.

PROPOSICIÓN

Para cada entero $n \geq 0$ existe un único polinomio T_n, llamado n-ésimo polinomio de Chebyshev, tal que para cada θ real

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta. \tag{1.1}$$

T_n tiene grado exactamente n. Si $n \geq 1$, el coeficiente de x^n en él es 2^{n-1}. Se tiene, además, para $n \geq 2$, la identidad

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \tag{1.2}$$

Demostración. Si hubiese dos polinomios que satisficiesen (1.1) coincidirían para los infinitos valores $-1 \leq x \leq 1$ de su variable, lo cual les fuerza a coincidir idénticamente. Las demás afirmaciones (existencia, grado, coeficiente director y (1.2)) se prueban por inducción. Para $n = 0$, para satisfacer (1.1), será $T_0 = 1$, de grado 0. Cuando $n = 1$ será $T_1(x) = x$, de grado 1, coeficiente director 2^0. Para $n = 2$, de cos $2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ deducimos que $T_2(x) = 2x^2 - 1$, de grado 2, coeficiente director 2^1. Claramente (1.2) se satisface. Supongamos que las propiedades se verifican para todo entero menor o igual que n. Entonces, en virtud de las fórmulas de transformación del producto de cosenos en suma de cosenos, se tiene $\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - cos(n-2)\theta$, es decir $\cos n\theta = 2\cos\theta T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta)$, quedando probado que $\cos n\theta$ es un polinomio T_n en el $\cos\theta$. Claramente T_n satisface las propiedades anunciadas.□

1.2.1 Observemos que para $-1 \leq x \leq 1$ se tiene

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \tag{1.3}$$

siendo arccos una determinación cualquiera del arco coseno, digamos la determinación que toma valores en $-\pi \leq \theta \leq 0$. Cuando x decrece monótonamente desde 1 hasta -1, el arco $\alpha = n\arccos x = n\theta$ decrece monótonamente desde 0 hasta $-n\pi$ (gira n medias vueltas en el sentido de las agujas del reloj); y por tanto, la función $T_n(x) = \cos\alpha$ oscila

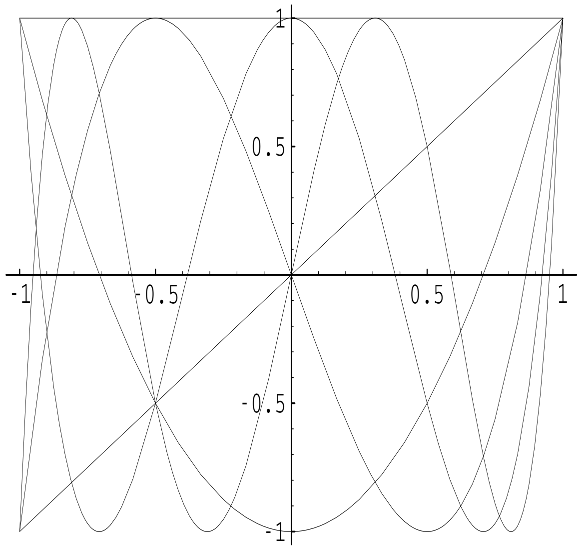

Figura 1.1: Polinomios de Chebyschev de grados 0 a 5

las mismas veces entre 1 y -1 alcanzando el valor que toma la función coseno en α en la abscisa $x = \cos\frac{\alpha}{n}$.

Así, el coseno parte del valor 1 en $\alpha = 0$ $(x = 0)$, va decreciendo hasta valer 0 en $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ $(x = \cos\frac{\pi}{2n})$, sigue decreciendo hasta valer -1 en $\alpha = -\pi$ $(x = \cos\frac{\pi}{n})$, luego crece, anulándose en $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$ $(x = \cos\frac{3\pi}{2n})$, etc... De esta forma, se prueba:

PROPOSICION

Los n ceros de T_n son los puntos

$$\eta_{nk} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Para $-1 \ \leq x \leq 1$, T_n toma valores entre -1 y 1. Estos valores extremos se alcanzan precisamente en los puntos

$$\zeta_{nk} = \cos\frac{2k\pi}{2n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

y en ellos $T_n(\zeta_{nk}) = (-1)^k$.

En la figura 1.1, se representan en $-1 \leq x \leq 1$, los polinomios de Chebyshev de grados cero a cinco, y pueden comprobarse estos extremos y ceros.

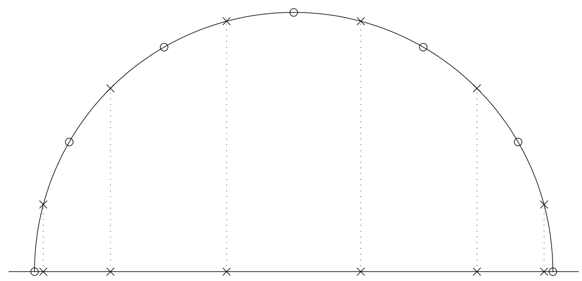

Figura 1.2: Puntos de interpolación de Chebyschev para $n = 6$

1.2.2 Consecuencia inmediata de la última conclusión de la proposición anterior es el siguiente teorema, fundamental para el objetivo que perseguimos:

TEOREMA

El n-ésimo polinomio de Chebyshev tiene norma del supremo en [-1,1] no mayor que cualquier otro polinomio de su mismo grado y coeficiente director.

Demostración. Si existiese un polinomio P del mismo grado y coeficiente director que T_n pero con norma del supremo más pequeña, la diferencia $T_n - P$ tendría grado $\leq n-1$ y sería positiva en $\zeta_{n0} = 1$ (pues ahí T_n vale 1 y $|P| < 1$), negativa en ζ_{n1} (pues ahí T_n vale -1 y $|P| < 1$), positiva en $\zeta_{n2}, \ldots$ Así se encuentran n cambios de signo para un polinomio de grado $\leq n-1$ y no idénticamente nulo, lo cual es absurdo. $\square$

1.2.3 Corolario 1. El polinomio $T_n/2^{n-1}$ tiene norma del supremo en [-1,1] no mayor que cualquier otro polinomio de grado n y coeficiente director la unidad.

1.2.4 Corolario 2. En el intervalo [-1,1], la cantidad $||(x-x_0)\cdots(x-x_n)||_\infty$ toma su valor mínimo posible frente a todas las elecciones de números reales $x_0, \ldots, x_n$ (dentro o fuera del intervalo, distintos o no) cuando los x_k se eligen como los $n+1$ ceros $\eta_{n+1,k}$ del $(n+1)$-ésimo polinomio de Chebyshev. El valor de dicha norma es en este caso $\frac{1}{2^n}$

Demostración. En efecto, para cada elección de x_i, el producto $(x-x_0)\cdots(x-x_n)$ es un polinomio de grado $n+1$ y coeficiente director unidad y por el corolario 1 (con $n+1$ en lugar de n) su norma del supremo no es menor que la de $T_{n+1}/2^n = (x - \eta_{n+1,1})\cdots(x-\eta_{n+1,n+1})$. El valor de la norma es evidente teniendo en cuenta que la del propio polinomio es 1. $\square$

De este modo la elección de nodos de interpolación más favorable para minimizar la cota del error en la norma infinito de [-1,1] consiste en tomar como abscisas los ceros del polinomio de Chebyshev correspondiente. La figura 1.2 nos muestra un proceso algorítmico para calcular dichos puntos; se trata de dividir la semicircunferencia que abarca el intervalo en n partes iguales, y entonces las abscisas de los puntos medios de los arcos son los puntos de interpolación buscados.

1.3 Cambio de intervalo

El caso de otro intervalo acotado $[a, b]$ se reduce al precedente por medio de *un cambio lineal de variable*. Si denominamos $\tilde{x}$ a la variable en $[-1, 1]$, es fácil ver que la transformación debe ser

$$\tilde{x} = -1 + 2\frac{x-a}{b-a} = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a} \tag{1.4}$$

donde se advierten los procesos de traslación y dilatación del intervalo.

Es interesante profundizar en este problema, con el que nos encontraremos más veces, y ver el tratamiento numérico que se le puede dar. Es evidente que los polinomios serán diferentes en el nuevo intervalo. Un proceso simbólico para obtener los nuevos polinomios consiste en la simple sustitución de la x en los polinomios básicos por esta $\tilde{x}$ para obtener nuevas expresiones en x. Es fácil ver que la nueva familia de polinomios es también *triangular* (¿por qué?) y de hecho en el intervalo $[a, b]$ cada uno de los nuevos polinomios toma exactamente los mismos valores que el original en los puntos transformados.

Esta observación nos va a servir para implementar un método numérico que nos permita calcular los coeficientes de los polinomios en $[a, b]$ sin recurrir a la sustitución algebraica. Supongamos que estamos construyendo los polinomios de Chebyschev hasta grado n en el citado intervalo. Es evidente que nos bastará con conocer sus valores en $n + 1$ puntos (¿por qué?). Una forma trivial y económica de conseguirlo, es elegir dichos puntos en la forma que mejor nos parezca (equidistantes, por ejemplo), conseguir sus transformados en el intervalo $[-1, 1]$ mediante la fórmula (1.4), y la evaluación de los polinomios originales nos proporcionara los valores buscados.

En términos matriciales, y teniendo en cuenta que evaluar un polinomio de grado n en un punto $\tilde{x}$, equivale a realizar el producto escalar del vector de coeficientes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ por el de valores de las potencias de x en dicho punto $(1, \tilde{x}, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n)$, evaluar los $n + 1$ primeros polinomios de Chebyschev en $n + 1$ puntos equivale a realizar el siguiente producto de matrices

$$T \cdot \tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n0} & T_{n1} & T_{n2} & \ldots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \ldots & \tilde{x}_n \\ \tilde{x}_0^2 & \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_2^2 & \ldots & \tilde{x}_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_0^n & \tilde{x}_1^n & \tilde{x}_2^n & \ldots & \tilde{x}_n^n \end{pmatrix}$$

donde T es la matriz (triangular inferior) con los coeficientes de los polinomios de Chebyschev en $[-1, 1]$. Este producto tiene que ser idéntico a

$$C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

donde C es la matriz buscada con los coeficientes de los polinomios en el intervalo de trabajo $[a, b]$. De la relación $T \cdot \tilde{X} = C \cdot X$, resulta evidente que

$$C = T \cdot \tilde{X} \cdot X^{-1} \tag{1.5}$$

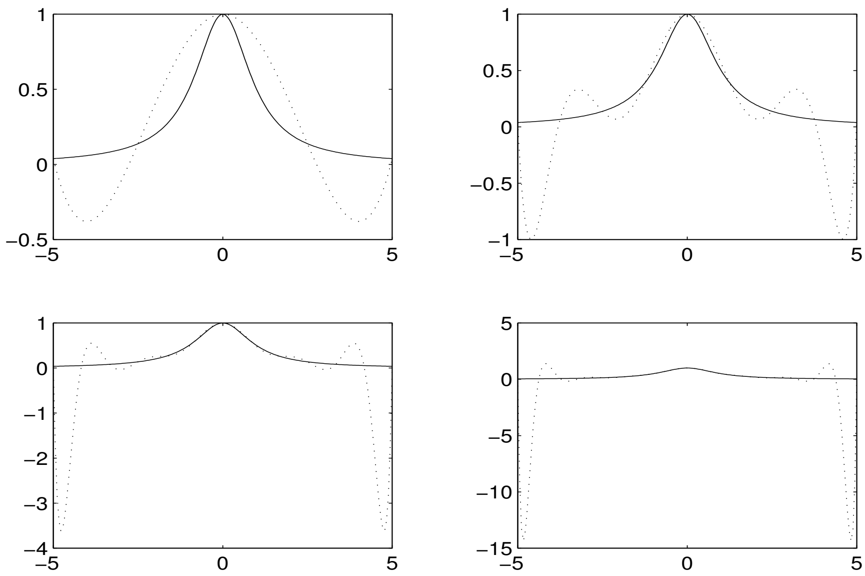

Figura 1.3: Interpolaciones sucesivas en 5, 9, 13 y 17 puntos equiespaciados

La existencia de la matriz inversa de X está garantizada siempre que tomemos puntos distintos (¿por qué?).

1.3.1 El ejemplo de Runge. La mejora en el error cometido cuando se toman los nodos de Chebyschev, es notable en algunos casos. Por ejemplo, en el célebre ejemplo de Runge en que se considera la funcion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

sobre el intervalo $[-5, 5]$, las figuras 1.3 y 1.4, nos muestran la calidad de la aproximación del polinomio interpolador para distintos valores de n, cuando se utilizan puntos equiespaciados y abscisas de Chebyshev respectivamente.

Aunque en este caso la convergencia parece evidente, existen funciones para las que la interpolación en más y más puntos de Chebyshev no converge. Así pues, se hace necesaria la búsqueda de interpolantes aún mejores que veremos en las próximas lecciones.

1.3.2 Aplicación. Economización de Chebyshev. Pero las aplicaciones de los polinomios de Chebyshev son muchas en el ámbito de la aproximación de funciones debido a sus notables propiedades. Supongamos que se desea aproximar en $-0.5 \leq x \leq 0.5$ la función $\exp(x)$ por un polinomio de segundo grado. Un aproximante obvio es el polinomio de Taylor $p_2 = 1 + x + x^2/2$. Para valores próximos a 0 no puede haber mejor elección de polinomio de segundo grado; pues, cuando x tiende a cero, p_2 difiere de la función en términos de tercer orden en x y no hay otro polinomio cuadrático con esta propiedad. Sin

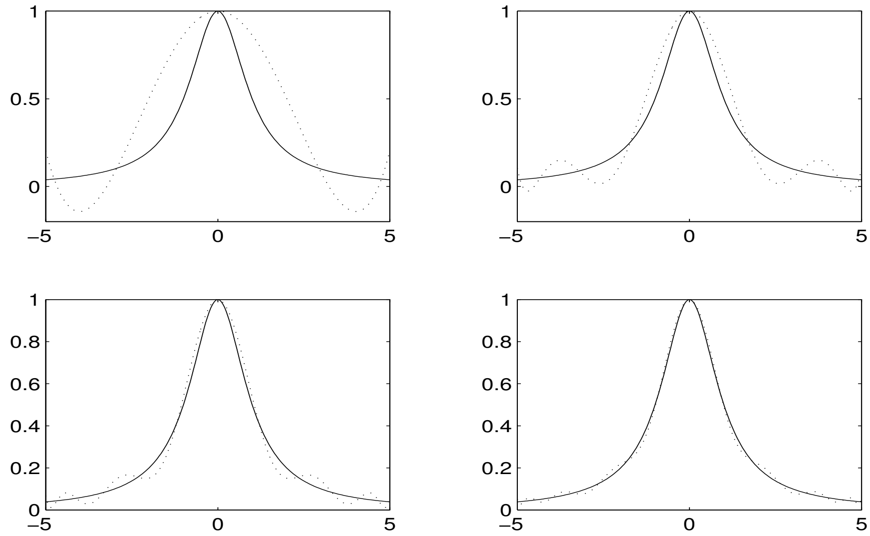

Figura 1.4: Interpolaciones sucesivas en 5, 9, 13 y 17 puntos de Chebyshev

embargo la aproximación dada por p_2 se degrada cuando x está próximo a los extremos del intervalo. Por ejemplo en $x = 0.5$, $p_2 = 1.625$ mientras que $\exp(0.5) = 1.649$.

Mostremos seguidamente cómo obtener un aproximante de segundo grado por un proceso llamado economización de Chebyshev. Para ello necesitamos partir de un aproximante polinómico de grado una unidad superior al aproximante buscado, en nuestro caso 3. El polinomio de Taylor $p_3(x) = 1+x+x^2/2+x^3/6$ nos servirá. Ahora sustituiremos p_3 por el polinomio P de grado 2 que haga la diferencia $Q = p_3 - P$ de tamaño más pequeño posible, más precisamente tal que $||Q||_\infty$ sea lo menor posible. Cuando P recorre todos los polinomios de segundo grado, Q recorre todos los polinomios cúbicos de coeficiente director 1/6 y de entre éstos el de menor norma del supremo será el múltiplo escalar del polinomio de Chebyshev cúbico cuyo coeficiente director sea 1/6.

El polinomio de Chebyshev cúbico es, por (1.2), $T_3(x) = 4x^3 - 3x$. Aquí estamos tratando con el intervalo [-0.5, 0.5] con lo que el polinomio escalado es $32x^3 - 6x$ y su múltiplo de coeficiente director 1/6 vale $Q = (1/6)x^3 - (1/32)x$. Esto conduce a $P = p_3 - Q = 1 + (33/32)x + x^2/2$. Este aproximante cuadrático, obtenido por economización en p_3, es más eficaz que p_2, por ejemplo en $x = 0.5$, vale 1.641.

Ahora podríamos todavía economizar P para obtener un polinomio de primer grado $(33x + 34)/32$.

1.4 Cuestiones y problemas

1.4.1 Use la relación de recurrencia para hallar T_4, T_5. Halle sus ceros sin utilizar la fórmula dada en esta lección. Use entonces la fórmula para validar sus cálculos. Como segunda comprobación lea los ceros en la figura 1.1, usando una regla milimetrada.

1.4.2 Paridad de los polinomios de Chebyshev. Pruebe que T_n es un polinomio par o impar según lo sea n.

1.4.3 Polinomio interpolador de Lagrange en los ceros de T_n. Pruebe que la solución del problema de interpolación de Lagrange basado en los n ceros de T_n como nodos es

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{T_n(x)(-1)^{k-1}\sin(\theta_k)}{x-x_k}$$

donde $\theta_k = (2k-1)\pi/(2n)$, $x_k = \cos\theta_k$, $k = 1, \ldots, n$.

1.4.4 Demuestre que $T_n(x) = x^n - C_{n,2}x^{n-2}(1-x^2) + C_{n,4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots$, siendo $C_{n,k}$ el número combinatorio n sobre k (número de subconjuntos con k objetos de un conjunto de n).

1.4.5 Cambio de intervalo. A la vista de lo afirmado en la sección 1.3, la matriz triangular inferior (¿por qué?) $\tilde{X} \cdot X^{-1}$ de la ecuación (1.5), que podríamos denominar matriz de *cambio de intervalo* no depende de los puntos elegidos para construir cada uno de los factores, sino de la transformación lineal efectuada. Por consiguiente, debe ser posible encontrar una expresión directa para esta matriz de cambio de coeficientes, en función de los extremos del intervalo $[a, b]$. (Indicación: Piense primero en un cambio escrito en la forma $\tilde{x} = mx + n$, y después sustituya en la matriz resultante.)

1.4.6 Expresión de un polinomio como combinación lineal de polinomios de Chebyshev u otras familias 'triangulares'. Consideremos los polinomios $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ tales que $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = c_1x - a_1$, $Q_k(x) = (c_kx - a_k)Q_{k-1}(x) - b_kQ_{k-2}(x)$, $k = 2, \ldots, n$, siendo $c_1, a_1, c_2, a_2, b_2, \ldots, c_n, a_n, b_n$ constantes conocidas, con cada c_k no nula. (Un ejemplo lo constituyen los polinomios de Chebyshev ¿por qué?)

Pruebe que Q_k tiene grado exactamente k, y por tanto que cada polinomio P de grado $\leq n$ tiene una única expresión $P(x) = \alpha_0Q_0(x) + \ldots + \alpha_nQ_n(x)$.

1.4.7 Evaluación de un polinomio expresado como combinación lineal de una familia 'triangular' de polinomios. Pruebe que, conocida la expresión del ejercicio anterior, el valor de P en un punto dado x^* puede hallarse mediante el algoritmo $d_{n+2} = 0$; $d_{n+1} = 0$; para $k = n, n-1, \ldots, 0$: $d_k = \alpha_k + (c_{k+1}x^* - a_{k+1})d_{k+1} - b_{k+2}d_{k+2}$; $P(x^*) = d_0$. (Indicación: sustituya en el desarrollo de P cada α_k por su expresión en términos de x^* y los a, b, c, d.)

¿Cuántas operaciones son así necesarias para evaluar P?

Este algoritmo contiene como casos particulares otros estudiados anteriormente ¿cuáles?

1.4.8 Sea $\alpha_0T_0(x) + \ldots + \alpha_nT_n(x)$ la expresión de un polinomio en la base de Chebyshev. ¿Cuánto vale la suma de todas las α_k?