Lección 7

Polinomios ortogonales

7.1 Funciones peso

Si (a,b) es un intervalo de la recta real, acotado o no, *una función peso* w en (a,b) es, por definición, una función real definida en (a,b), continua, positiva excepto quizá en un conjunto finito de puntos (en los que es nula), y tal que para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ las integrales

$$\int_a^b x^n w(x) dx \tag{7.1}$$

existan.

7.1.1 Ejemplos

a) Supongamos primero que el intervalo (a,b) es acotado. Tras un cambio lineal de variable podemos tomar $(a,b) =$ (-1,1). La función

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

α, β reales, satisface todas las condiciones de una función peso, salvo la existencia de las integrales (7.1). Estas existen si, y sólo si, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ ¿por qué?

b) Supongamos que (a,b) es semi-infinito y que, tras un cambio lineal de variable, $(a,b) = (0,\infty)$. La expresión

$$x^\alpha e^{-x}, \qquad \alpha > -1$$

define una función peso.

c) Si (a,b) es toda la recta, e^{-x^2} es una función peso.

7.1.2 Dada una función peso w en (a,b) la integral

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \tag{7.2}$$

define un producto interno en el espacio $L^2_w(a,b)$ de las funciones f para las cuales

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx < \infty$$

En la lección anterior habíamos considerado el caso particular de (7.2) en que (a,b) era acotado, y casi siempre usamos $w \equiv 1$. Al introducir funciones peso no idénticamente unidad se hace posible satisfacer (7.1) en un intervalo no acotado. Notemos además que el efecto de la función peso en los problemas de aproximación es que al calcular la distancia

$$||f-p|| = \left(\int_a^b |f(x)-p(x)|^2 w(x)dx \right)^{1/2}$$

las desviaciones $f(x)-p(x)$ correspondientes a los x en que w es mayor contribuyen más que las correspondientes a los x en que w es pequeña.

En esta lección estudiaremos problemas de aproximación en que $X = L^2_w(a,b)$, y $S = \Pi_n = \{\text{polinomios de grado} \leq n\ \}$ (por la condición en (7.1), $L^2_w(a,b)$ contiene todos los polinomios). Como observamos en la lección precedente, la obtención efectiva de la mejor aproximación se simplifica notablemente si en Π_n se elige una base ortogonal. La construcción de tales bases se lleva a cabo en el punto siguiente.

7.2 Polinomios ortogonales

Dada una función peso w en (a,b), una sucesión de polinomios ortogonales $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es aquella en que Q_n es un polinomio de grado exactamente n, $n = 0,1,2,\ldots$ y además $\langle Q_n, Q_m \rangle = 0$ si $n \neq m$, $n,m = 0,1,\ldots$

Notemos que, fijada w, si $\{Q_n\}$ y $\{R_n\}$ son dos sucesiones de polinomios ortogonales, entonces $Q_n = \alpha_n R_n$, $n = 0,1,2,\ldots$ donde α_n es un número real no nulo. En efecto,

$$Q_n(x) = q_n x^n - Q_n^*(x), \qquad R_n = r_n x^n - R_n^*(x),$$

donde q_n, $r_n \neq 0$ y Q_n^*, R_n^* tienen grado $\leq n-1$. Como $q_n x^n - Q_n^*(x)$ y $(q_n/r_n)(r_n x^n - R_n^*(x)) = q_n x^n - (q_n/r_n)R_n^*(x)$ son ortogonales a todo polinomio de grado $\leq n-1$ (¿por qué?), resulta que $Q_n^*(x)$ y $(q_n/r_n)R_n^*(x)$ son mejores aproximaciones a $q_n x^n$ por polinomios de grado $\leq n-1$. Por la unicidad, $Q_n^*(x) = (q_n/r_n)R_n^*(x)$ y por tanto $q_n/r_n R_n = Q_n$. En resumen los polinomios ortogonales están definidos salvo una normalización que determine el coeficiente director (o alternativamente el valor en un punto que no sea un cero, etc...)

Una propiedad fundamental es que los polinomios ortogonales se pueden generar por recurrencia.

7.2.1 TEOREMA

Si $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales entonces existen constantes c_n, a_n, b_n tales que

$$Q_n(x) = (c_n x - a_n)Q_{n-1}(x) - b_n Q_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{7.3}$$

Recíprocamente, definiendo

$$\begin{aligned}
&Q_0(x) = 1 \\
&Q_1(x) = x - a_1 \\
&a_n = \langle xQ_{n-1}, Q_{n-1}\rangle / \langle Q_{n-1}, Q_{n-1}\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\
&b_n = \langle xQ_{n-1}, Q_{n-2}\rangle / \langle Q_{n-2}, Q_{n-2}\rangle, \quad n = 2, 3, \ldots \\
&Q_n = (x - a_n)Q_{n-1} - b_n Q_{n-2}, \qquad\qquad n = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

se genera la sucesión de polinomios ortogonales mónicos.

Demostración. Demostramos sólo el teorema directo, ya que el recíproco es análogo. Como xQ_{n-1} tiene grado exactamente n, se expresa como

$$xQ_{n-1} = \alpha_0 Q_0 + \alpha_1 Q_1 + \ldots + \alpha_{n-1}Q_{n-1} + \alpha_n Q_n, \quad \alpha_n \neq 0$$

(¿Por qué los Q_i son una base?). Por consiguiente, dividiendo por α_n

$$Q_n = \beta_0 Q_0 + \ldots + \beta_{n-2}Q_{n-2} + \beta_{n-1}Q_{n-1} + \beta_n xQ_{n-1},$$

para ciertos β_i, y sólo hay que probar que $\beta_i = 0$ si $i < n-2$. Ahora bien, para $i < n-2$,

$$\begin{aligned}
\langle Q_n, Q_i\rangle \;=\;& \beta_0\langle Q_0, Q_i\rangle + \ldots + \\
& \beta_{n-2}\langle Q_{n-2}, Q_i\rangle + \beta_{n-1}\langle Q_{n-1}, Q_i\rangle + \beta_n\langle xQ_{n-1}, Q_i\rangle.
\end{aligned}$$

El primer miembro es nulo por la hipótesis de ortogonalidad y lo mismo ocurre con todos los $\langle Q_j, Q_i\rangle$, cuando $i \neq j$. Por tanto,

$$0 = \beta_i\langle Q_i, Q_i\rangle + \beta_n\langle xQ_{n-1}, Q_i\rangle.$$

Ahora bien, $\langle xQ_{n-1}, Q_i\rangle = \langle Q_{n-1}, xQ_i\rangle$ (¿por qué?) y Q_{n-1} es ortogonal a xQ_i, al ser el grado de este $< n-1$. En definitiva $\beta_i\langle Q_i, Q_i\rangle = 0$ ó $\beta_i = 0$, y resulta

$$Q_n = (\beta_n x + \beta_{n-1})Q_{n-1} + \beta_{n-2}Q_{n-2}$$

En consecuencia, $c_n = \beta_n$ y

$$a_n = -\beta_{n-1} = \beta_n \frac{\langle xQ_{n-1}, Q_{n-1}\rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1}\rangle} \qquad b_n = -\beta_{n-2} = \beta_n \frac{\langle xQ_{n-1}, Q_{n-2}\rangle}{\langle Q_{n-2}, Q_{n-2}\rangle}$$

□

Vemos que β_n es el cociente entre coeficientes principales y β_{n-2} se puede escribir como

$$-\frac{\beta_n\langle Q_{n-1}, Q_{n-1}\rangle}{\beta_{n-1}\langle Q_{n-2}, Q_{n-2}\rangle}$$

pues $\langle Q_n, Q_n\rangle = \beta_n\langle xQ_{n-1}, Q_n\rangle = \beta_n\langle xQ_n, Q_{n-1}\rangle$, para todo n. Esto evita algunos cálculos.

7.2.2 La relación (7.3) se llama “relación de recurrencia de tres términos”. Gracias a ella es posible evaluar eficientemente polinomios P que vengan expresados en la forma $P = \alpha_0 Q_0 + \ldots + \alpha_n Q_n$ (ejercicio 1.4.7).

Por completitud, notemos que si $\{Q_n\}_0^\infty$ es una sucesión de polinomios ortogonales, entonces $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ son una base de Π_n y que la mejor aproximación en Π_n a una función $f \in L^2_w$ se escribe

$$p^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, Q_i \rangle}{\langle Q_i, Q_i \rangle} Q_i. \tag{7.4}$$

7.2.3 Una propiedad importante de los polinomios ortogonales es la siguiente:

TEOREMA

Si $\{Q_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales y $f \in L^2_w \cap C(a,b)$ es ortogonal a $Q_0, \ldots, Q_{n-1}$ entonces ó f es idénticamente nula ó hay n puntos r_i en (a,b) en los que f cambia de signo (es decir, hay un entorno de r_i en que ó bien $f > 0$ para $x > r_i$, y $f < 0$ para $x < r_i$, ó bien $f > 0$, para $x < r_i$, y $f > 0$ para $x < r_i$).

Demostración. La condición $\langle f, Q_0 \rangle = 0$ significa

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = 0$$

luego si f no es idénticamente nula, toma valores positivos y negativos y, siendo continua, hay, cuando menos, un punto en el que cambia el signo. Supongamos que cambie el signo sólo $k < n$ veces, y sean $r_1 < r_2 < \ldots < r_k$ los puntos en que lo hace. Entonces

$$\int_a^b f(x)(x - r_1) \cdots (x - r_k)w(x)dx \neq 0$$

pues el integrando no cambia de signo (¿por qué?). Pero esto es absurdo, pues f debe ser ortogonal a $(x - r_1) \cdots (x - r_k) \in \Pi_{n-1}$. □

7.2.4 Corolario. Q_n tiene sus n raíces reales, simples y en el intervalo (a, b).

7.3 Sistemas clásicos

7.3.1 Polinomios de Chebyshev. Los definimos en un capítulo anterior como $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Demostraremos ahora que $\{T_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales en (-1,1) para la función peso

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(Obsérvese que este es el caso $\alpha = \beta = -1/2$ del ejemplo a) de 7.1.1). En efecto, si n, m son enteros no negativos.

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^{0} T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\frac{-\operatorname{sen}\theta d\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ \pi/2 & \text{si} \quad n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si} \quad n = m = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Las relaciones $\langle T_n, T_m\rangle = 0$, $n \neq m$, n, m enteros no negativos, junto con $T_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ caracterizan a los polinomios de Chebyshev (¿por qué?).

Particularizando la fórmula (7.4) al caso presente vemos que si definimos, para $f \in L^2_w$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.5}$$

entonces la aproximación mejor a f por un polinomios de grado $\leq m$, respecto de la función peso $1/\sqrt{1-x^2}$ es

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} A_i T_i(x) \tag{7.6}$$

7.3.2 Polinomios de Legendre. Se pueden definir por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

(ejercicio 7.6.3). Son ortogonales en (-1,1) para $w(x) \equiv 1$, caso particular $\alpha = \beta = 0$ en el ejemplo a) de 7.1.1. La ortogonalidad se establece como sigue. Si Q es un polinomio de grado $< n$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = Q(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx$$

el término integrado es nulo, ya que ± 1 son ceros de orden n de $(x^2-1)^n$. Reiterando el proceso llegamos a

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx$$

que es nulo por serlo $Q^{(n)}(x)$ idénticamente.

Los $\{P_n\}$ se caracterizan por la ortogonalidad y por la propiedad $P_n(1) = 1$ (ejercicio 7.6.3), por lo que también es posible definir los P_n como los polinomios ortogonales en (-1,1) que toman en 1 el valor 1. Si se adopta tal definición, (7.7) pasa a ser un teorema, llamado de Rodrigues.

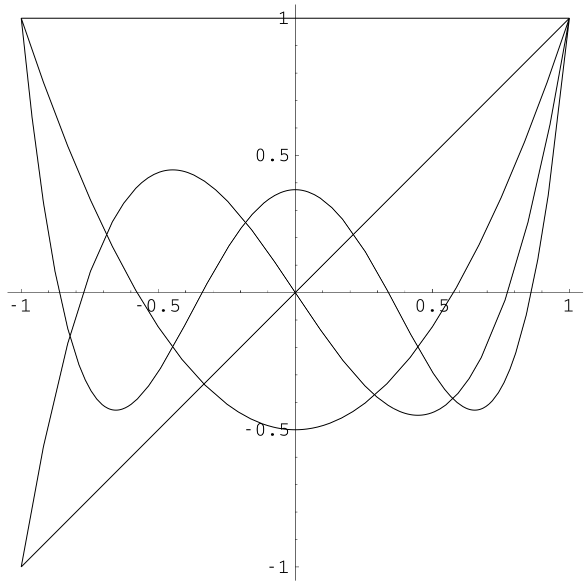

Figura 7.1: Polinomios de Legendre de grados 0 a 4

7.3.3 Polinomios de Laguerre.

Se definen por

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{7.8}$$

son ortogonales en $(0, \infty)$ para el peso e^{-x}, caso particular $\alpha = 0$ del ejemplo b) de 7.1.1 . Véase el ejercicio 7.6.4.

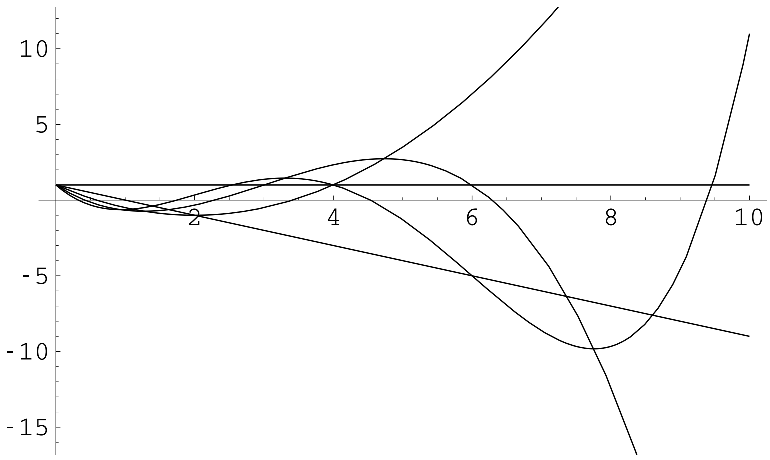

Figura 7.2: Polinomios de Laguerre de grados 0 a 4 (para $\alpha = 0$)

7.3.4 Polinomios de Hermite.

Se definen por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.9}$$

son ortogonales en $(-\infty, \infty)$ para el peso e^{-x^2}, ejemplo c) de 7.1.1. Véase el ejercicio 7.6.5.

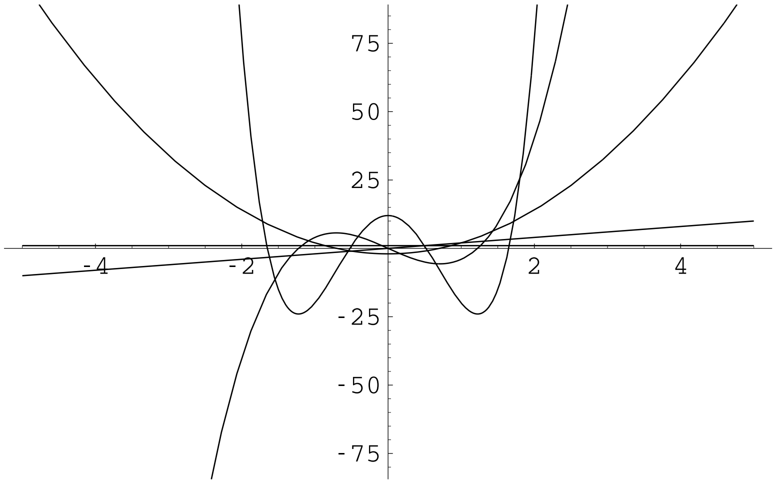

Figura 7.3: Polinomios de Hermite de grados 0 a 4

7.4 Convergencia de los desarrollos ortogonales

Supongamos ahora que X es uno de los espacios $L^2_w(a, b)$ considerados en el apartado 7.1.2 y que $S_n = \Pi_n$. Si tomamos una sucesión de polinomios ortogonales $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $L^2_w(a, b)$, la mejor aproximación p_n a $f \in L^2_w$ por polinomios de Π_n, se representa explícitamente como

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, Q_i \rangle}{\langle Q_i, Q_i \rangle} Q_i$$

y por tanto la cuestión de si $p_n \to f$ en $L^2_w(a, b)$ se reduce a examinar si

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\langle f, Q_i \rangle}{\langle Q_i, Q_i \rangle} Q_i \tag{7.10}$$

donde la suma de la serie se entiende en el sentido de la norma de $L^2_w(a, b)$. Cuando (7.10) vale se dice que se ha desarrollado f en *serie de polinomios ortogonales*. Nos limitaremos aquí al caso en que (a, b) = (-1,1), $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ (desarrollos en serie de Chebyshev).

El desarrollo de $f \in L^2_w(a, b)$ es

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k(x) \tag{7.11}$$

donde los coeficientes A_k están dados por la fórmula (7.5) .

7.4.1 El siguiente resultado no tiene las hipótesis más débiles posibles y es fácil de demostrar.

TEOREMA

Si $f \in C([-1,1])$, entonces su desarrollo de Chebyshev converge a f en la norma de L^2_w, $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Demostración. Observemos ante todo que $C([-1,1])$ está contenido L^2_w (¿por qué?). Basta probar que f es límite en L^2_w de polinomios. Por el teorema de Weierstrass, dado $\varepsilon > 0$ hay un polinomio P con $||f-p||_\infty \leq \varepsilon$, pero entonces, en L^2_w

$$||f-p|| = \left(\int_{-1}^{1} [f(x)-p(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/2} \leq \varepsilon \left(\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/2} = \varepsilon \pi^{1/2}$$

lo que demuestra que podemos aproximar f por polinomios tanto como deseemos.□

7.4.2 Bajo hipótesis mas restrictivas la serie (7.11) converge hacia f *uniformemente.* (Note que la convergencia uniforme implica la convergencia en L^2_w , pero no al revés.)

TEOREMA

Si $f \in C^2([-1,1])$, su desarrollo en serie de Chebyshev converge uniformemente hacia f.

Demostración. Cambiando de variable $x = \cos\theta$ en la expresión de los A_k

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta d\theta$$

Poniendo $f(\cos\theta) = g(\theta)$, dos integraciones por partes dan

$$A_k = -\frac{2}{\pi k^2} \int_0^\pi \cos k\theta g''(\theta) d\theta$$

(¿por qué?) . Así $|A_k| = 0(k^{-2})$, luego por el criterio M de Weierstrass, la serie (7.11) converge uniformemente hacia cierta función continua F. Pero el teorema anterior muestra que la serie converge a f en L^2_w. Por la unicidad del límite en L^2_w, $f = F$ y el teorema está probado.□

7.4.3 Notas:

a) Si en el teorema $f \in C^n([-1,1])$, $n \geq 2$, se puede iterar la integración por partes y $|A_k| = 0(k^{-n})$: *La regularidad de la función se traduce en la rapidez de decaimiento de los coeficientes del desarrollo de Chebyshev y por ello en la rapidez en la convergencia de la serie de Chebyshev.*

b) Según el teorema $f \in C^2$ basta para garantizar la convergencia uniforme del desarrollo de Chebyshev. Sin embargo C^∞ no garantiza ni la convergencia puntual del desarrollo en serie de Taylor!

7.5 Cuadratura Gaussiana

Hasta ahora, suponíamos que, en la fórmula de cuadratura

$$I_{n+1}(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j) \tag{7.12}$$

los x_j habían sido elegidos de antemano y veíamos que los $n+1$ parámetros α_j podían determinarse únicamente para que (7.12) fuese exacta en las $n+1$ funciones $1, x, \ldots, x^n$. Supongamos ahora que en (7.12) podemos elegir también los nodos x_j. Disponemos de $2n+2$ parámetros y parece plausible esperar que (7.12) pueda hacerse exacta para las $2n+2$ funciones $1, x, \ldots, x^{2n+1}$. Imponer esa exactitud conduce (método directo) a un sistema con $2n+2$ ecuaciones para $2n+2$ incógnitas. Sin embargo la solubilidad de tal sistema no puede ser decidida por métodos algebraicos ya que las ecuaciones no son lineales.

Las fórmulas de cuadratura que eligen los nodos para lograr el mayor grado de exactitud posible se llaman gaussianas en honor a su inventor. A pesar de su antigüedad, su popularización ha sido reciente: en la época del cálculo manual, los datos, al estar tabulados, imponían los nodos.

7.5.1 Fórmulas gaussianas Tratemos de determinar $\{\alpha_j\}$, $\{x_j\}$ en (7.12) para lograr el mayor grado de precisión posible. Como tal fórmula ha de ser interpolatoria (¿por qué?)

$$\int_a^b f(x)dx - I_{n+1}(f) = \int_a^b W(x) f[x_0, \ldots, x_n, x] dx$$

con

$$W(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \tag{7.13}$$

De éste modo, (7.12) es exacta para f si y sólo si $f[x_0, \ldots, x_n, x]$ es *ortogonal* a W (en $[a,b]$ con peso unidad). Si f es un polinomio de grado $n+k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ su diferencia $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$ es un polinomio en x de grado k. Más precisamente cuando f recorre Π_{n+k+1}, su diferencia recorre *todo* Π_k (¿por qué?). Así W es exacta en Π_{n+k+1} si y sólo si $\{x_j\}$ son tales que W es ortogonal a todo polinomio de grado $\leq k$. No es entonces posible tomar $k = n+1$, ya que W tiene grado $n+1$. Para $k = n$ la ortogonalidad $W \perp \Pi_k$ se produce si y sólo si los $\{x_j\}$ se eligen como las $n+1$ raíces distintas del polinomio ortogonal de grado $n+1$ (en $[a,b]$ con peso 1) (note que tales raíces están en (a,b)). Podemos concluir entonces:

TEOREMA

Una fórmula del tipo (7.12) con $n+1$ nodos puede tener a lo sumo grado $2n+1$. Tal máximo se alcanza únicamente en la fórmula interpolatoria llamada gaussiana basada en los ceros del polinomio mónico de grado $n+1$ ortogonal a los de grado n en (a,b) para el peso unidad.

7.5.2 Ejemplo. Construyamos la regla gaussiana de 3 nodos en [-1,1]. Según el teorema los nodos son los ceros de uno cualquiera de los polinomios P de grado tres que son ortogonales a todos los de grado a lo sumo dos. Estos P son multiplos escalares del polinomio de Legendre, que de acuerdo con la fórmula 7.7 es $(5x^3-3)/2$. Así los nodos son $\pm\sqrt{3/5}$, 0. Los pesos se determinan imponiendo que la regla sea interpolatoria, o equivalentemente que sea exacta para $1, x, x^2$. Así se obtiene (efectúe los cálculos) que el nodo 0 tiene peso 8/9 y los dos restantes peso 5/9 cada uno. (Vea problema 7.6.11.) Esta fórmula integra exactamente todos los polinomios hasta el grado 5 inclusive.

7.5.3 Errores En relación con los errores de redondeo, una propiedad interesante de las reglas gaussianas es la siguiente:

TEOREMA

Los coeficientes α_j, $j=0,\ldots,n$ de la regla gaussiana de $n+1$ nodos son todos positivos.

Demostración. Si Q_j denota el polinomio, de grado $2n$, $W^2/(x-x_j)^2$, podemos escribir, a la vista del grado de las fórmulas de Gauss

$$\int_a^b Q_j(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k Q_j(x_k)$$

La integral es positiva. En la suma, los términos con $k \neq j$ tienen $Q_j(x_k)=0$, mientras que $Q_j(x_j)=(x_j-x_0)^2\cdots(x_j-x_n)^2>0$. Es claro entonces que α_j es positivo. □

Para el error de interpolación tendremos:

TEOREMA

Si f tiene $2n+2$ derivadas continuas en $[a,b]$, el error de cuadratura $E_{n+1}(f)$ de la regla de cuadratura gaussiana de n+1 nodos viene dado por

$$E_{n+1}(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b W^2(t)dt$$

siendo ξ un punto de $[a,b]$ (que depende de f) y W la función en (7.13).

Demostración. Denotemos por P el único polinomio de grado $\leq 2n+1$, tal que $P(x_j) = f(x_j)$, $P'(x_j) = f'(x_j)$, $0 \leq j \leq n$.

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P(x_j)$$

Invocando la exactitud de la regla gaussiana para P

$$E_{n+1}(f) = \int_a^b [f(x) - P(x)]dx$$

bastando entonces para concluir la prueba usar la forma del error en la interpolación de Hermite y el teorema del valor medio del cálculo integral.□

7.6 Cuestiones y problemas

7.6.1 ¿Existe una función peso en un intervalo apropiado para la que $1 + x^2$ sea un miembro de una sucesión de polinomios ortogonales? ¿Y para la que x^2 lo sea?

7.6.2 Pruebe que si f es una función continua de $L^2_w(a,b)$ su mejor aproximación p_n^* por un polinomio de grado $\leq n$ la interpola en $n+1$ puntos distintos de (a,b). Así p_n^* es de hecho un polinomio interpolador de Lagrange. Este resultado no puede usarse para construir p_n^* pues los nodos de la interpolación, que dependen de f, son desconocidos *a priori* .

7.6.3 **Polinomios de Legendre** Demostrar las siguientes propiedades:

a) La expresión (7.7) define un polinomio de grado exactamente n.

b) $P_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Justamente la constante $2^n n!$ en (7.7) se elige para que valga esta propiedad.

c) P_n es un polinomio par o impar de acuerdo con la paridad de n.

7.6.4 Pruebe que la expresión (7.8) define un polinomio de grado $\leq n$. Pruebe la ortogonalidad de tales polinomios. Pruebe que los $\{L_n\}$ se caracterizan por la ortogonalidad y por tener coeficiente director $(-1)^n/n!$

7.6.5 Pruebe que la expresión (7.9) define un polinomio de grado $\leq n$. Pruebe la ortogonalidad de tales polinomios. Pruebe que los $\{H_n\}$ se caracterizan por la ortogonalidad y por tener coeficiente director 2^n.

7.6.6 Demostrar las siguientes fórmulas de recurrencia:

a) $P_0 = 1$, $P_1 = x$,

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \qquad n \geq 1$$

b) $L_0 = 1$, $L_1 = -x + 1$,

$$L_{n+1} = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \qquad n \geq 1$$

c) $H_0 = 1$, $H_1 = 2x$,

$$H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \qquad n \geq 1$$

7.6.7 Polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Para α, β parámetros reales > -1, la sucesión $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n=0,1,2,\ldots}$ se define por ser ortogonal en $(-1, 1)$ para el peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ junto con la condición

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)}$$

Demuestre que cuando $\alpha = \beta = 0$ los polinomios de Jacobi son los de Legendre. Estudie la relación entre $P_n^{(-1/2,-1/2)}$ y T_n.

7.6.8 Polinomios de Chebyshev de segunda especie. Pruebe que para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ hay un único polinomio U_n tal que, para cada θ real, $U_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(n+1)\theta$. Pruebe que U_n (Polinomio de Chebyshev de segunda especie) tiene grado n. Pruebe la relación de recurrencia $U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$, $n = 1, 2$. Pruebe que los U_n son ortogonales en $(-1, 1)$ para el peso $\sqrt{1 - x^2}$. Halle una fórmula de Rodrigues que exprese U_n como múltiplo escalar de la derivada n-ésima de una función.

7.6.9 Pruebe que si una función f continua en [0,1] es tal que

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0,$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ entonces f es idénticamente nula.

7.6.10 Desarrolle en serie de Chebyshev las funciones

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \sqrt{1-x^2}, \arccos x$$

7.6.11 En [-1,1] demuestre que la regla gaussiana es simétrica en el sentido de que si x es un nodo de tal regla, $-x$ también lo es y además x y $-x$ entran con el mismo peso. (Utilice que la regla gaussiana es la única con su grado de precisión.)

7.6.12 Cuadratura gaussiana respecto de una función peso. En un intervalo abierto (a, b) no necesariamente acotado, sea w una función peso (véase 7.1). Se trata de aproximar integrales de la forma

$$\int_a^b f(x)w(x)dx$$

por una combinación lineal de valores de f (no de valores del integrando) en $n+1$ puntos distintos fijados (independientes de f) x_i. Los pesos de la combinación lineal también se suponen independientes de f. Pruebe, que dados los x_i, hay una única elección de pesos que haga la fórmula exacta cuando f es un polinomio de grado $\leq n$. Con esos únicos pesos la fórmula se llama interpolatoria ¿por qué? Pruebe que hay una única elección de nodos y pesos para los que la fórmula integre exactamente todos los polinomios de grado $\leq 2n+1$, y que tal fórmula no integra exactamente todos los polinomios de grado $2n+2$. ¿Son los pesos positivos? Dé una expresión para el error de cuadratura.

7.6.13 Cuadratura de Lobatto. Se va a aproximar

$$\int_a^b f(x)dx$$

por una regla del tipo $\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + \alpha_n f(b)$, donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$; $x_1, \ldots, x_{n-1}$ son parámetros a determinar ($n \geq 1$). Demuestre que hay una única fórmula (llamada de Lobatto) para la que el grado de precisión sea $2n-1$. ¿Qué ventajas puede tener, en uso compuesto, la regla de Lobatto sobre la gaussiana con el mismo número de nodos? ¿Cuál es la fórmula de Lobatto con $n = 1$? ¿Y con $n = 2$?

7.6.14 Abscisas de la fórmula de Lobatto. Pruebe que las abscisas de la fórmula de Lobatto de $n+1$ nodos son a, b y los $n-1$ ceros de la derivada del polinomio ortogonal de grado n en (a, b) para el peso 1.

7.6.15 Cuadratura de Radau. Se va a aproximar

$$\int_a^b f(x)dx$$

por una regla del tipo $\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$, donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$; $x_1, \ldots, x_n$ son parámetros libres. Demuestre que hay una única fórmula (llamada de Radau) para la que el grado de precisión sea $2n$.