Lección 2

La interpolación de Hermite u osculatoria

2.1 El problema de Hermite

En el problema de interpolación lagrangiana se determina un polinomio de grado $\leq n$ por sus valores en $n+1$ nodos, mientras que en el de Taylor hay un solo nodo pero además del valor de la función hay que reproducir los de las n primeras derivadas. Estos dos problemas son casos particulares extremos de uno más general, llamado de Hermite u osculatorio, donde se contemplan $r+1$ $(0 \leq r \leq n)$ nodos x_i y en cada nodo se pide reproducir la función y sus $m_i \geq 0$ primeras derivadas. Naturalmente se debe cumplir que el número total de condiciones iguale al número $n+1$ de parámetros libres en el polinomio es decir

$$\sum_{0 \leq i \leq r} (1 + m_i) = n + 1. \tag{2.1}$$

2.1.1 Formalmente, el problema que se plantea Hermite es el siguiente:

Dados una función real f definida en $[a, b]$, $r+1$ puntos distintos $x_0, \ldots, x_r$ en dicho intervalo y enteros no negativos $m_0, \ldots, m_r$, n de suerte que se satisfaga (2.1) y que las derivadas de f que vamos a escribir existan, **determinar un polinomio** P_n de grado menor o igual que n tal que

$$\begin{array}{llll}
P_n(x_0) = f(x_0), & P_n'(x_0) = f'(x_0), & \ldots, & P_n^{(m_0)}(x_0) = f^{(m_0)}(x_0); \\
P_n(x_1) = f(x_1), & P_n'(x_1) = f'(x_1), & \ldots, & P_n^{(m_1)}(x_1) = f^{(m_1)}(x_1); \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
P_n(x_r) = f(x_r), & P_n'(x_r) = f'(x_r), & \ldots, & P_n^{(m_r)}(x_r) = f^{(m_r)}(x_r).
\end{array} \tag{2.2}$$

2.2 Construcción del interpolante en forma de Newton

Observemos que en un problema de Hermite *no se puede dar como dato la derivada k-ésima en un nodo si no se han dado la función y todas las derivadas hasta la $k-1$.*

2.2.1 TEOREMA

El problema de interpolación de Hermite tiene solución única.

Demostración. El camino usado en ocasiones anteriores (buscar P_n por coeficientes indeterminados en potencias de x) tiene el inconveniente de que la matriz del sistema resultante es de estructura complicada. Vamos a proceder en analogía a lo hecho en la forma de Newton, es decir buscar primero la constante P_0 que satisface la primera condición, luego la recta P_1 que satisface las dos primeras, una parábola P_2 determinada por las tres primeras, y sucesivos polinomios P_d de grado $\leq d$ que satisfaciendo las $d+1$ primeras, y así hasta P_n. Supuesto hallado P_d denotamos por Q_{d+1} el polinomio que hay que sumarle para obtener P_{d+1}.

Antes de comenzar con la demostración notemos que, por definición, z es una raíz de multiplicidad $k \geq 1$ de un polinomio $Q(x)$ si $Q(x)$ es divisible entre $(x-z)^k$. Una condición necesaria y suficiente para que ello ocurra es que z anule no sólo a Q sino también a sus $k-1$ primeras derivadas (demostración inmediata, hágala).

Es obvio que P_0 está unívocamente determinado. Q_1 ha de ser de grado a lo sumo 1 y anularse en x_0, luego de la forma $c_1(x-x_0)$. Imponiendo la segunda condición de la primera línea de (2.2) se determina unívocamente c_1 (¿quién es?) y por tanto P_1. Ahora Q_2 debe tener grado 2 y anularse en x_0 junto con su derivada. Por ello es de la forma $c_2(x-x_0)^2$. La tercera condición de esta primera línea de (2.2) determina $c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$ y por tanto P_2. Continuando en esta forma alcanzamos P_{m_0} (que naturalmente no es otra cosa que el polinomio de Taylor de grado m_0 de f en x_0, expresado en potencias de $(x-x_0)$).

Ahora Q_{m_0+1} es de grado m_0+1 y debe ser nulo con sus m_0 primeras derivadas en x_0, luego de la forma $c_{m_0+1}(x-x_0)^{m_0+1}$. La primera condición de la segunda línea de (2.2) determina la constante. El siguiente término a añadir es de la forma $c_{m_0+2}(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)$ ya que debe ser nulo con sus m_0 primeras derivadas en x_0 y anularse también en x_1.

Prosiguiendo esta marcha se llega a P_n satisfaciendo los requerimientos del problema escrito como combinación lineal de los $n+1$ polinomios

$$\begin{array}{cccc} 1, & (x-x_0), & \dots, & (x-x_0)^{m_0}, \\ (x-x_0)^{m_0+1}, & (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1), & \dots, & (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & & (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\cdots(x-x_r)^{m_r}. & \end{array} \tag{2.3}$$

Para la unicidad, es fácil demostrar que si hay dos polinomios que satisfagan las condiciones impuestas, su diferencia es un polinomio idénticamente nulo. □

2.2.2 Notas

1. El proceso da como casos particulares la forma de Newton del polinomio interpolador de Lagrange (si cada m_i es cero) y el polinomio de Taylor (si $r=0$).

2. No es necesario tomar las condiciones (2.2) en el orden en que lo hemos hecho. Otra posibilidad es empezar por la primera para x_0, seguida de la primera para x_1, hasta la primera para x_r, seguir con la segunda (si la hay) de x_0, de la segunda (si la hay) de x_1, etc. Se comprueba inmediatamente la validez de un proceso análogo al de la demostración del teorema, usando ahora la base (que debe leerse por columnas)

$$
\begin{array}{cccc}
1, & (x-x_0)\cdots(x-x_r), & \ldots, & \vdots \\
(x-x_0), & (x-x_0)^2\cdots(x-x_r), & \ldots, & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(x-x_0)\cdots(x-x_{r-1}), & \multicolumn{3}{l}{\ldots(x-x_0)^{m_0'}(x-x_1)^{m_1'}\cdots(x-x_r)^{m_r'}.}
\end{array}
\tag{2.4}
$$

donde el último término no se puede precisar más, pero los m_i' son siempre m_i+1, excepto para el punto que tenga mayor número de derivadas con valor prefijado (y si hay varios con idéntica cantidad, el de mayor índice), y en esa fila estará el susodicho término.

3. Más generalmente es posible tomar las condiciones en (2.2) en cualquier orden, con tal que al tomar una de una fila hayamos ya satisfecho todas las anteriores de esa fila, es decir al tratar de reproducir una derivada de orden superior en un punto hayamos ya tomado en consideración todas las derivadas de orden más bajo en ese mismo punto, lo cual garantiza que cada subproblema de los que vamos resolviendo sea también un problema de Hermite.

2.2.3 Ejemplo. El polinomio de Hermite $P(x)$ de grado ≤ 4 para una función y con los siguientes valores de y, y', y'' (tomados de la función sen x)

$$
\begin{array}{lll}
y(0)=0, & y'(0)=1, & y''(0)=0; \\
y(\pi)=0, & y'(\pi)=-1; &
\end{array}
$$

es el siguiente. Construído como en la demostración del teorema, con la siguiente base de polinómios entrando por filas con su correspondiente condición

$$
\begin{array}{ccc}
1, & x, & x^2; \\
x^3, & x^3(x-\pi); &
\end{array}
$$

resulta

$$P(x) = 0 + x + 0x^2 - (1/\pi^2)x^3 + (1/\pi^3)x^3(x-\pi).$$

Con el orden que propicia la base de tipo (2.4), incorporándose ahora por columnas para satisfacer la condición respectiva

$$
\begin{array}{ccc}
1, & x(x-\pi), & x^2(x-\pi)^2; \\
x, & x^2(x-\pi); &
\end{array}
$$

el *mismo* polinomio se escribe

$$P(x) = 0 + 0x - (1/\pi)x(x-\pi) + 0x^2(x-\pi) + (1/\pi^3)x^2(x-\pi)^2.$$

Y así hasta un total de 10 expresiones diferentes (escríbalas).

2.2.4 Para el error de interpolación tenemos el siguiente resultado que se demuestra como los correspondientes de los casos de Lagrange y Taylor.

TEOREMA

Con las notaciones del problema de Hermite, si f es de clase C_n en $[a, b]$ y tiene derivada $(n+1)$-ésima en (a, b) entonces para cada x en $[a, b]$ existe un punto ξ en el interior del menor intervalo cerrado que contenga a x y a cada x_i, $0 \leq i \leq r$ tal que si $P_n(x)$ es la solución del problema entonces

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0)^{m_0+1} \cdots (x - x_r)^{m_r+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Por ejemplo, para el polinomio cúbico que reproduce a f y a f' en x_0, x_1 si nos limitamos a evaluar el interpolante entre x_0, x_1 se tiene

$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{|x_1 - x_0|^4}{384} M_4, \tag{2.5}$$

siendo M_4 una cota de la derivada cuarta de f en el intervalo cerrado de extremos x_0, x_1. Basta observar que $|x - x_0||x - x_1|$ toma el valor máximo $\frac{|x_1 - x_0|^2}{4}$ en el punto medio del intervalo.

2.3 Diferencias divididas con argumentos repetidos

En la forma de Newton, para el problema de Lagrange en los $n+1$ nodos distintos $x_0^*, \ldots, x_n^*$, los $n+1$ polinomios de base son

$$1, (x - x_0^*), (x - x_0^*)(x - x_1^*), \ldots, (x - x_0^*) \cdots (x - x_{n-1}^*). \tag{2.6}$$

La base (2.3) del problema de Hermite sería de la forma (2.6) si autorizásemos a los x_i^* a no ser distintos y tomásemos los $m_0 + 1$ primeros nodos $x_0^*, \ldots, x_{m_0}^*$ todos iguales entre sí e iguales a x_0, luego un bloque de $m_1 + 1$ nodos iguales entre sí $x_{(m_0+1)}^*, \ldots, x_{(m_0+1)+m_1}^*$ e iguales a x_1, etc. (En el caso del ejemplo 2.2.3 anterior la sucesión de nodos para la primera expresión sería 0, 0, 0, π, π.)

También la base (2.4) es de la forma (2.6) si se permiten nodos repetidos (para la segunda expresión del mismo ejemplo tenemos 0, π , 0, π, 0). Más generalmente, cada base asociada a un orden admisible de tomar las condiciones (2.2) da origen a una sucesión *ordenada* de $n+1$ elementos escogidos de entre el conjunto de $r+1$ nodos distintos, figurando $m_i + 1$ veces cada nodo x_i.

En consecuencia, adoptaremos el *convenio* de que un polinomio P_n interpola a una función f en una sucesión de nodos $x_0^*, \ldots, x_n^*$, *no necesariamente distintos*, si f y P_n coinciden en x_j^* y lo mismo les sucede a sus m_i primeras derivadas cada vez que el valor x_j^* aparece $m_i + 1$ veces en la lista de nodos. En el ejemplo 2.2.3 nuestro polinomio interpola a la función sen x en las sucesiones nodos 0, 0, 0, π, π, o en cualquier permutación (con repetición) de sus elementos.

Con esta nomenclatura el polinomio interpolador en una sucesión $x_0^*, \ldots, x_n^*$ se escribe en la forma

$$c_0 + c_1(x - x_0^*) + c_2(x - x_0^*)(x - x_1^*) + \ldots + c_n(x - x_0^*) \cdots (x - x_{n-1}^*) \tag{2.7}$$

siendo los c_i constantes adecuadas, que ya hemos visto cómo determinar por recurrencia. Claramente c_i, $0 \le i \le n$ es el coeficiente de x^i en el polinomio interpolador de grado $\le i$ en $x_0^*, \ldots, x_i^*$ y por tanto depende sólo de f y $x_0^*, \ldots, x_i^*$. Cuando los x_i^* eran distintos hemos escrito $c_i = f[x_0^*, \ldots x_i^*]$ y, tras la consideración anterior, es lícito extender esta notación al caso en que los nodos pueden repetirse. También seguimos diciendo que c_i es una diferencia dividida de orden i de f.

Observemos que, para poder definir las diferencias divididas con algún nodo repetido, la función f tiene que tener derivadas en él (tantas como veces aparezca el nodo menos una).

2.3.1 Para calcular diferencias divididas conviene notar las siguientes reglas.

(i) Las diferencias divididas no dependen del orden en que se escriban sus argumentos. (Ilustración: para los ejemplos 2.2.3 anteriores $\operatorname{sen}[0, 0, 0, \pi, \pi] = \operatorname{sen}[0, \pi, 0, \pi, 0] = 1/\pi^3$.)

(ii) Cuando todos los argumentos toman un mismo valor x_0 la diferencia dividida i-ésima de f vale $f^{(i)}(x_0)/i!$.

(iii) Si entre los argumentos de $f[x_0^*, \ldots x_i^*]$ hay dos con valores distintos (que según (i) podremos suponer son el primero y el último) entonces tal diferencia dividida puede calcularse a partir de dos diferencias divididas de orden $i-1$ de acuerdo con

$$f[x_0^*, \ldots x_i^*] = \frac{f[x_1^*, \ldots x_i^*] - f[x_0^*, \ldots x_{i-1}^*]}{x_i^* - x_0^*}. \tag{2.8}$$

La validez de (i) y (iii) se demuestra exactamente igual que en el caso de nodos distintos, mientras que (ii) es una consecuencia de la conocida forma del polinomio de Taylor.

Con las tres reglas anteriores es fácil construir una tabla de diferencias divididas en cuya diagonal figuren los coeficientes necesarios para escribir el polinomio osculador en la base (2.6). Para el ejemplo 2.2.3 tendremos

x	y	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$	$\triangle^4$
0	$\underline{0}$				
0	$\underline{0}$	$\underline{1}$			
0	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0/2}$		
π	$\underline{0}$	0	$-1/\pi$	$-1/\pi^2$	
π	$\underline{0}$	$\underline{-1}$	$-1/\pi$	0	$1/\pi^3$

Los números que aparecen subrayados se escriben directamente de los valores conocidos de la función y sus derivadas, *teniendo cuidado de escalar con los factoriales.* Los restantes elementos se obtienen por la fórmula (2.8). En esta tabla están también los coeficientes de la otra expresión del ejemplo, ¿dónde? y ¿por qué?

2.3.2 Cálculo infinitesimal y cálculo en diferencias finitas. Escribamos, en forma de Newton, la recta que interpola (lagrangianamente) a f en dos puntos

$$f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \tag{2.9}$$

y consideremos fijo el valor de x_0, tomando x_1 como un parámetro. Para el valor $x_1 = x_0$, la diferencia dividida en (2.9) carece de sentido al ser un cociente ($\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{0}{0}$) indeterminado. Esto está de acuerdo con el hecho de que no podemos interpolar lagrangianamente sino en puntos distintos. Sin embargo, si f es derivable en x_0 existe el límite de tal cociente cuando x_1 tiende a confundirse x_0 y vale $f'(x_0)$. Así (2.9) tiende a la recta tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{2.10}$$

de la que por tanto parece razonable decir que interpola a f en dos puntos confundidos. Esto concuerda con el *convenio* que introdujimos en la sección previa, porque (2.10) es la única recta cuyo valor y el de su derivada coinciden con los de f en x_0. Por otro lado estas observaciones muestran que, para x_0 fijo $f[x_0, x_1]$ es una función continua de x_1 y que podíamos también haber definido el valor de la diferencia dividida en nodos coincidentes ($f[x_0, x_0] = f'(x_0)$), como límite de valores $f[x_0, x_1]$ en nodos distintos.

De hecho, fijada f de clase C^i, la diferencia dividida i-ésima es una función continua de sus $i+1$ variables. Por tanto la extensión hecha en la sección precedente del concepto de *diferencia dividida* para incorporar valores repetidos es la única extensión continua del concepto original de diferencia dividida relativo a puntos distintos. Además, fijado un valor de la variable x, el valor del interpolante de Hermite $P_n(x)$ es función continua de los nodos, lo cual prueba que un polinomio osculador es límite de polinomios de Lagrange. Ninguno de estos resultados debe sorprendernos: justamente el concepto de derivada se ha introducido en el análisis para que las cosas resulten de este modo.

2.4 Caso a trozos. Cúbicas de Hermite segmentarias

Como ya es bien conocido, interpolar por polinomios de grado alto es, en general, muy poco recomendable. Los elementos de los espacios de funciones continuas lineales a trozos $M_0^1(\Delta)$, de los espacios de funciones continuas cuadráticas a trozos $M_0^2(\Delta)$, etc., suministran interpolantes mucho más ventajosos. Sin embargo éstos nuevos interpolantes son a su vez inutilizables en muchas aplicaciones debido a que *no son derivables* en los puntos de la partición Δ, en cuya vecindad el interpolante queda definido por expresiones analíticas distintas a izquierda y derecha. En esta lección consideraremos interpolantes polinómicos a trozos más regulares que los hasta ahora estudiados.

2.4.1 Definición. Si Δ es una partición fijada $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ en que estemos interesados, denotamos por $M_1^3(\Delta)$ el espacio formado por las funciones reales H de clase C^1 en $[a, b]$ (esto es, continuas con derivada continua) que restringidas a cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) de la partición coinciden con un polinomio $H^{(i)}$ de grado ≤ 3, para $i = 1, \ldots, n$.

Aclaremos el concepto con un ejemplo. Si la partición origina dos únicos subintervalos (-1,0), (0,1), la función q que en [-1,0] coincide con $2+x$ y en [0,1] coincide con $2+x+x^3$ está en el correspondiente M_1^3. Basta observar dos cosas.

(i) Que para $x = 0$ se obtiene $q(0) = 2$ tanto usando la expresión relativa a [-1,0] como usando la expresión relativa a [0,1], lo cual muestra que q está bien definida y es continua en 0 al existir los límites laterales y coincidir.

(ii) Que $q'(0) = 1$ usando cualquiera de las expresiones lo cual implica (¡demuéstrelo!) que q es derivable en 0 con derivada 1 y por tanto q continuamente diferenciable en [-1,1].

2.4.2 PROPOSICION

Si f es una función definida en $[a, b]$ y derivable en los puntos de Δ, hay un único elemento H en $M_1^3(\Delta)$ tal que

$$f(x_i) = H(x_i), f'(x_i) = H'(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Demostración: En efecto, en cada $[x_{i-1}, x_i]$ tenemos cuatro datos $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, $f'(x_{i-1})$, $f'(x_i)$ que determinan unívocamente un polinomio cúbico $H^{(i)}$ (¿por qué?). Los n segmentos polinómicos definen en $[a, b]$ una función H, que es continuamente diferenciable como fácilmente se demuestra utilizando el mismo argumento que en el ejemplo anterior. □

Este resultado implica en particular que la dimensión de $M_1^3(\Delta)$ es $2n+2$ (¿por qué?). El interpolante H se llama *cúbico de Hermite a trozos.*

2.4.3 Para el error, y como consecuencia inmediata de 2.5

$$||f - H||_\infty \leq \frac{h^4}{384} M_4,$$

donde la norma es la del supremo en $[a, b]$, h denota el diámetro de la partición y M_4 es una cota en $[a, b]$ de la derivada cuarta de f. Se concluye que una función de clase C^4 se puede aproximar tanto como se desee por cúbicas de Hermite a trozos, con sólo refinar convenientemente la partición. Además el interpolante converge a la función con orden cuatro.

Por otra parte, aunque para la cota utilizamos una constante M_4 que mayora a la derivada cuarta de la función en todo el intervalo, es evidente que en cada uno de los trozos se puede tomar una cota de la citada derivada en el correspondiente subintervalo y la longitud del mismo como h. De modo que si estamos en situación de poder elegir los puntos de interpolación siempre podemos espaciarlos de modo que los intervalos sean menores en las zonas en que la derivada (cuarta en este caso) sea muy grande y más grandes en aquellas otras zonas en que la derivada sea menor. De esta forma se pueden obtener errores relativamente pequeños con pocos puntos de interpolación adecuadamente distribuidos.

2.4.4 Para manejar una función H de $M_1^3(\Delta)$ (sea interpolante que satisface las condiciones (2.11) para una función dada f o no), es usual guardar las ecuaciones de sus n segmentos cúbicos $H^{(i)}$. Si empleamos la representación tipo Newton, tendremos en $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} H(x) = H^{(i)}[x_{i-1}] \quad & +H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1}) \\ & +H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 \\ & +H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i](x - x_{i-1})^2(x - x_i), \end{aligned} \tag{2.12}$$

en la que las necesarias diferencias divididas, que mantendríamos en memoria, se habrían obtenido de la diagonal de la tabla

$$\begin{array}{lllll} x_{i-1} & H_{i-1} & & & \\ x_{i-1} & H_{i-1} & H'_{i-1} & & \\ x_i & H_i & H[x_{i-1}, x_i] & \dfrac{H[x_{i-1}, x_i] - H'_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})} & \\ x_i & H_i & H'_i & \dfrac{H'_i - H[x_{i-1}, x_i]}{(x_i - x_{i-1})} & \dfrac{H'_{i-1} - 2H[x_{i-1}, x_i] + H'_i}{(x_i - x_{i-1})^2} \end{array} \tag{2.13}$$

donde por claridad no hemos escrito el desarrollo explícito de $H[x_{i-1}, x_i]$ y hemos empleado abreviaturas como $H_{i-1} = H(x_{i-1})$, $H'_{i-1} = H'(x_{i-1})$, etc... Así hemos obtenido la representación del segmento cúbico en términos de los valores de H y H' en x_{i-1} y x_i, valores que en el problema de interpolación (2.1) son datos.

2.4.5 Por otro lado, podemos usar la representación en potencias de $x - x_{i-1}$ (que es más conveniente que la (2.12), sobre todo si hay que evaluar no sólo H sino también sus derivadas). Entonces para $x_{i-1} \leq x \leq x_i$,

$$\begin{aligned} H(x) = H^{(i)}[x_{i-1}] \quad & +H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1}) \\ & +H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1})^2 \\ & +H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1})^3 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Los coeficientes a almacenar se obtienen a partir de los valores de H y H' en x_{i-1} y x_i, utilizando la tabla (2.13), la definición recursiva de las diferencias divididas y teniendo en cuenta que las diferencias terceras de una cúbica son constantes. Concretamente

$$\begin{aligned} H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}] \quad &= \frac{H'_{i-1} - 2H[x_{i-1}, x_i] + H'_i}{(x_i - x_{i-1})^2} \\ H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}] \quad &= H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] \\ & \quad -(x_i - x_{i-1})H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] \\ &= \frac{3H[x_{i-1}, x_i] - 2H'_{i-1} - H'_i}{(x_i - x_{i-1})} \\ H^{(i)}[x_{i-1}, x_{i-1}] \quad &= H'_{i-1} \\ H^{(i)}[x_{i-1}] \quad &= H_{i-1}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

Obsérvese que las derivadas segunda y tercera en un punto x_i son, en general, diferentes por la izquierda y la derecha.

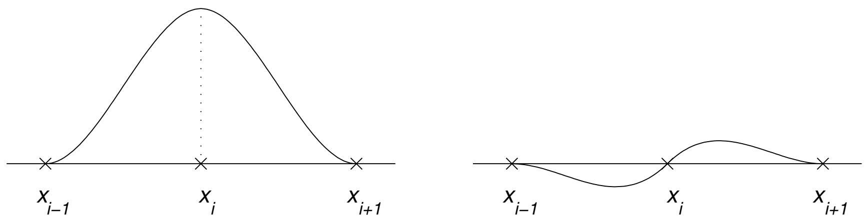

Figura 2.1: Elementos Φ_i y Θ_i en un punto interior

2.4.6 En cualquiera de las representaciones (2.12) y (2.14), útiles en la práctica, se almacenan $4n$ coeficientes, lo que contrasta con la dimensión $2n+2$ del espacio (¿cuál es la explicación?). En ciertas ocasiones conviene representar H en términos de una base. La base más usual es (véase la figura 2.1) la formada por las funciones $\Phi_i(x)$ y $\Theta_i(x)$ de $M_1^3(\Delta)$, $0 \leq i \leq n$, tales que $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\Phi_i'(x_j) = 0$, $\Theta_i(x_j) = 0$, $\Theta_i'(x_j) = \delta_{ij}$.

En este base se tiene (¿por qué?)

$$H(x) = \sum_{0 \leq i \leq n} \left[H(x_i)\Phi_i(x) + H'(x_i)\Theta_i(x) \right]. \tag{2.16}$$

Fácilmente se comprueba que las funciones de esta base poseen soporte local (a lo sumo dos subintervalos), lo cual muestra que la interpolación cúbica de Hermite a trozos posee carácter local.

2.5 Cuestiones y problemas

2.5.1 Caracterización analítica del polinomio osculador. Con las notaciones del problema de Hermite pruebe que P_n es el único polinomio de grado $\leq n$ tal que $f(x) - P_n(x) = \circ((x - x_i)^{m_i})$ cuando $x \to x_i$, $1 \leq i \leq r$. Así las gráficas de f y P_n se acercan entre sí suavemente en cada nodo x_i con $m_i > 0$. Este es el origen etimológico de osculador (ósculo = beso).

2.5.2 Pruebe que los ceros del polinomio de Chebyshev T_{n+1} dan las $n+1$ posiciones óptimas de interpolación en [-1, 1] incluso si se autoriza a que esas posiciones puedan ser coincidentes. ¿Cuál es la peor elección?

2.5.3 Interpolación de Hermite en sentido estricto. El caso del problema de Hermite en que cada m_i es 1 (es decir se reproducen funciones y derivadas primeras) se llama interpolación de Hermite en sentido estricto. Sean x_i, $0 \leq i \leq r$ los nodos dos a dos distintos y denotemos por L_i los correspondientes polinomios de base de Lagrange (es decir cada L_i posee grado $\leq r$ y además $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq r$). Pruebe que los $2r+2$ polinomios

$$[1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)]L_i(x)^2, (x - x_i)L_i(x)^2$$

dan una base en la que el polinomio solución del problema de Hermite estricto tiene por coeficientes los valores de f y de f' en los nodos.

2.5.4 Evaluación de derivadas en la forma de Newton. Sea $p(x)$ el polinomio

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

donde no se supone que los x_i sean dos a dos distintos. Pruebe que cuando se evalúa $p(x^*)$ por el algoritmo de Horner, es decir se toman

$$b_n = c_n, b_{k-1} = c_{k-1} + (x^* - x_{k-1})b_k, \qquad k = n, n-1, \ldots, 1$$

resulta $p(x^*) = b_0$. Los resultados intermedios b_k son útiles porque se puede escribir

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x^*) + b_2(x - x^*)(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x^*)(x - x_0)\cdots(x - x_{n-2}),$$

representación análoga a la de partida donde x^* ha desplazado a x_{n-1}. Si itera el algoritmo con el mismo valor para x^* acaba obteniendo el desarrollo de $p(x)$ en potencias de $(x - x^*)$, de donde conoce inmediatamente las derivadas sucesivas de p en x^*.

Precaución: Si el p dado es el polinomio interpolador de una cierta función f en $x_0, \ldots, x_n$ entonces la nueva representación **NO** es el polinomio interpolador de f en $x^*, x_0, \ldots, x_{n-1}$. Basta pensar que en general $f(x^*) \neq p(x^*)$. Lo que en realidad tenemos es un polinomio del mismo grado que el anterior y que le interpola en $n+1$ puntos, por lo que ambos han de coincidir.

2.5.5 Consideremos un polinomio de tercer grado que en las abscisas 1, 2, 3 y 4 toma los valores 1, 7, 25 y 61 respectivamente. Calcular su valor y el de sus derivadas hasta el tercer orden en los puntos 0 y 5. Los cálculos deben hacerse numéricamente y utilizando únicamente dos vectores de datos: uno guardará abscisas y el otro valores diversos del polinomio y sus diferencias divididas.

2.5.6 La interpolación lineal desde un punto de vista abstracto. Compruebe que todos los casos de interpolación estudiados hasta ahora son casos particulares del siguiente problema abstracto. Dado un espacio vectorial X de dimensión finita $n+1$, $n+1$ formas lineales L_i sobre X y $n+1$ escalares f_i, $0 \leq i \leq n$ encontrar un elemento p (el interpolante) en X tal que $L_i(p) = f_i$ para cada i, $0 \leq i \leq n$.

2.5.7 Compare las cotas de error para la interpolación cúbica a trozos de Hermite y para la interpolación cúbica a trozos de Lagrange (donde recordemos que el interpolante coincide con f en cada nodo de la partición y además en cada uno de los puntos que sirven para dividir los subintervalos en tres partes iguales). ¿Qué ventajas e inconvenientes cree que tiene cada tipo de interpolación?

2.5.8 Interpolación quíntica con continuidad C^2. Considere el espacio $M_2^5(\Delta)$ de funciones de clase C^2 que restringidas a cada subintervalo de la partición de la sección 2.4 coinciden con un polinomio de grado menor o igual que cinco. Reproduzca para este espacio todas las consideraciones hechas en dicha sección para $M_1^3(\Delta)$.