Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. xx (xxxx), Núm. x, Pág. 1000

Normas, matrices reales, vectores complejos

Si se usa la norma 1 para los vectores de dimensión d, la norma como operador $\|A\| = \sup_{x\neq 0}(\|Ax\|/\|x\|)$ de una matriz $A = (a_{jk})$ se calcula con la conocida receta

$$\|A\| = \max_{1\leq k\leq d} \sum_{j=1}^{d} |a_{jk}|. \tag{1}$$

Esta fórmula vale tanto en el caso real como en el complejo, es decir tanto si $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ y actúa sobre los vectores de $\mathbb{R}^d$, como si $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ y lo hace sobre los de $\mathbb{C}^d$. Por tanto, para A con elementos reales, el valor de su norma como operador en $\mathbb{R}^d$ es el mismo que como operador en $\mathbb{C}^d$. Esto también ocurre cuando se parte, en vez de la 1, de las normas 2 ó ∞ para los vectores, como se comprueba acudiendo, en lugar de a (1), a las correspondientes recetas. ¿Es cierto que para cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{C}^d$, la norma que $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tiene como operador en $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|)$ es la misma que posee como operador en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$? Ninguno de los (muchos) libros de álgebra lineal que hemos consultado se plantea esta pregunta.

La respuesta es negativa y en realidad el cociente entre las normas de A (real) como operador complejo y como operador real puede ser arbitrariamente alto. Con $d = 2$, fijemos $K > 0$ y definamos

$$\|(x_1, x_2)^T\| = |x_1| + |\mathrm{i}Kx_1 + x_2|. \tag{2}$$

Para la matriz con $a_{1,1} = 1$ y $a_{1,2} = a_{2,1} = a_{2,2} = 0$,

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{|x_1| + |\mathrm{i}Kx_1|}{|x_1| + |\mathrm{i}Kx_1 + x_2|}, \qquad x = (x_1, x_2)^T \neq 0.$$

Si x es real, $|\mathrm{i}Kx_1 + x_2| \geq |\mathrm{i}Kx_1|$, así que el cociente es ≤ 1. Vale 1 cuando $x_2 = 0$ y por tanto la norma "real" de A es 1. Si x es complejo, tomando $x_2 = -\mathrm{i}Kx_1 \neq 0$ el cociente vale $1 + K$ y por ello la norma "compleja" de A es $\geq 1 + K$. (De hecho, al ser el denominador $\geq |x_1|$, el cociente es $\leq 1 + K$, lo que implica que la norma "compleja" es exactamente $1 + K$.)

La norma (2) es ciertamente artificiosa, ¿se podría haber dado un contrajemplo tomando una de las normas p usuales ($p \neq 1, 2, \infty$)? No. Para cualquier norma p, el valor de $\|A\|$ (A real) no varía al pasar de vectores reales a complejos. Los lectores interesados encontrarán sin duda la demostración, que no es del todo trivial.

F. M. Dopico y J. M. Sanz-Serna
Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid
Avenida de la Universidad 30, E-28911 Leganés (Madrid), Spain
Correo electrónico: dopico@math.uc3m.es, jmsanzserna@gmail.com
Página web: https://gauss.uc3m.es/fdopico/fdopico.html, http://sanzserna.org/